EXERCICES — PROBABILITÉS 03 – VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

LOI D'UNE VAD

1. Soit X et Y deux VARD indépendantes. Déterminer la loi de X + Y lorsque…

a) X et Y suivent des lois de POISSON de paramètres λ et μ.

b) X et Y suivent une même loi géométrique de paramètre p.

c) X et Y suivent des lois binomiales de paramètres (n, p) et (m, p).

On pourra redémontrer la formule de VANDERMONDE : $\sum\limits_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$.

2. Soient X et Y deux VARD indépendantes suivant une même loi géométrique.
On pose $U=\min(X,Y)$ et $V=X-Y$.

a) Déterminer $\mathbb{P}(X>n)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

b) Déterminer les lois de U et de V.

c) U et V sont-elles indépendantes ?

3. Soient $a>0$ et $\lambda\in\mathbb{R}$. On considère la famille de réels $p_{i,j}=\lambda\dfrac{a^{i+j}}{i!j!}$ où $(i,j)\in\mathbb{N}^2$.

a) Déterminer la valeur de λ pour qu'il constituent la distribution de probabilités d'un couple de VARD (X,Y).
On fixe désormais λ à cette valeur.

b) Déterminer les lois marginales de X et Y.

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

4. Soit (X,Y) une couple de VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ vérifiant :

$$\forall(p,q)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}\big((X,Y)=(p,q)\big)=\lambda\frac{p+q}{p!\,q!\,2^{p+q}}$$

a) Déterminer λ.

b) Déterminer les lois marginales.

c) X et Y sont-elles indépendantes ?

5. Soit $X\sim\mathcal{G}(p)$, avec $0<p<1$.

a) Montrer que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X>k)=(1-p)^k$.

b) Montrer alors la propriété d'absence de mémoire :

$$\forall(k,l)\in\mathbb{N}^2,\ \mathbb{P}_{(X>l)}(X>k+l)=\mathbb{P}(X>k)\qquad(*)$$

c) Réciproquement, montrer qu'une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant $(*)$ suit une loi géométrique.
On pourra introduire les réels $p=\mathbb{P}(X=1)$ *et* $q=1-p=\mathbb{P}(X>1)$.

6. Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{Z}$. On définit $X^+=\max(X,0)$ et $X^-=\max(-X,0)$.

a) Déterminer $X^+(\Omega)$ et $X^-(\Omega)$ et déterminer les lois de X^+ et X^- en fonction de celle de X..

b) Déterminer la loi conjointe du couple (X^+,X^-) en fonction de la loi de X.

c) À quelle condition sur X les variables X^+ et X^- sont-elles indépendantes ?

7. Soit C une VAD presque sûrement constante.
Montrer que pour toute VAD X définie sur le même espace probabilisé, $X\perp\!\!\!\perp C$.

8. Soient X, Y et Z trois VAD définies sur un même espace probabilisé.

a) Montrer que si $X\perp\!\!\!\perp(Y,Z)$ alors $X\perp\!\!\!\perp Y$ et $X\perp\!\!\!\perp Z$.

b) Montrer que la réciproque est fausse.

9. Soient X, Y deux VAD indépendantes.

a) On suppose que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.
Montrer que (X,X) et (X,Y) ne suivent pas la même loi.

b) Trouver une CNS pour que (X,X) et (X,Y) suivent la même loi.

10. Une urne contient au départ une boule blanche et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en ajoutant à chaque tirage, une boule blanche supplémentaire. On note X la variable égale au numéro du tirage final où apparaît une boule noire, si un tel tirage existe, et égale à 0 si, à chaque tirage, une boule blanche est obtenue.

a) Donner sans calcul $X(\Omega)$.

b) Déterminer, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=n)$.

c) Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\mathbb{P}(X=n)=1$. En déduire $\mathbb{P}(X=0)$. Qu'en conclure ?

11. Vous êtes assis(e) avec votre ami(e) Dominique au bar de votre hôtel d'Ibiza en début d'après-midi. Comme vous vous ennuyez quelque peu (il n'y a pas grand chose à faire de passionnant à Ibiza en journée), vous observez les personnes entrant dans le bar.

a) Dominique lance le pari que le nombre de personnes entrant dans le bar avant la 1re femme est pair. Prenez-vous le pari ?
On suppose que la proportion de femmes alentour vaut $p\in]0,1[$.

b) Dominique vous parie ensuite que le nombre de personnes entrant dans le bar durant la prochaine heure est pair. Prenez-vous le pari ?
On suppose que le nombre de personnes entrant dans le bar suit une loi de POISSON.

ESPÉRANCE ET VARIANCE

12. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right)$.

13. Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ d'espérance finie.

a) Montrer que $\frac{1}{X}$ est d'espérance finie.

b) En développant $\mathbb{E}\left(\left(t\sqrt{X}+\frac{1}{\sqrt{X}}\right)^2\right)$, montrer que $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}\left(\frac{1}{X}\right) \geqslant 1$.

14. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 4\mathbb{P}(X=n+2) = 5\mathbb{P}(X=n+1) - \mathbb{P}(X=n).$$

Montrer que X suit une loi usuelle. En déduire la valeur de son espérance et de sa variance.

15. Soit $X \sim \mathscr{P}(\theta)$. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.

16. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = a3^{-k}$.

a) Déterminer a pour que l'on définisse bien ainsi une loi de probabilité.

b) X a-t-elle plus de chances de prendre des valeurs paires ou impaires ?

c) Montrer que X a une espérance et une variance et les calculer.

d) On pose $Y = X(X-1)$. Montrer que la variable aléatoire Y admet une espérance et la calculer.

17. Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On les tire un à un, successivement et avec remise. Soit X la VARD égale au nombre de tirages nécessaires pour obtenir pour la première fois deux numéros distincts.
Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.
On pourra considérer les événements $A_i =$ *« le numéro i est sorti au premier tirage ».*

18. Un sauteur en hauteur tente de franchir les hauteurs successives 1, 2, ... ,n... On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de franchir la hauteur n est $\frac{1}{n}$. Le sauteur est éliminé à son premier échec. On note X la variable aléatoire égale au numéro du dernier saut réussi.

a) Déterminer la loi de X, et vérifier que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X=k) = 1$.

b) Montrer que X a une espérance et une variance et les calculer.

19. On joue à PILE ou FACE avec une pièce non équilibrée. À chaque lancer la probabilité d'obtenir FACE est égale à $\frac{1}{3}$. Les lancers sont supposés indépendants.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de lancers nécessaires pour l'obtention pour la première fois de deux PILES consécutifs. Soit n un entier naturel non nul. On note p_n la probabilité de l'événement $\{X=n\}$. On note de plus F_i l'événement « obtenir FACE au i-ème lancer ».

a) Expliciter les événements $\{X=2\}$, $\{X=3\}$, $\{X=4\}$, $\{X=5\}$ à l'aide des événements F_i et $\overline{F}_i$. Déterminer la valeur de p_1, p_2, p_3, p_4, p_5.

b) A l'aide de la formule des probabilités totales, en distinguant deux cas selon le résultat du premier lancer, montrer que :

$$\forall n \geqslant 3,\ p_n = \frac{2}{9}p_{n-2} + \frac{1}{3}p_{n-1}$$

c) En déduire l'expression de p_n en fonction de n, pour $n > 1$.

d) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

20. Deux joueurs A et B lancent une pièce, dont la probabilité d'obtenir « PILE » est 1/3, jusqu'à l'obtention d'un « PILE ». On note X_A (resp. X_B) le nombre de lancers nécessaires au joueur A (resp. B).

a) Donner les lois de X_A et X_B ainsi que leurs espérances et variances.

b) Calculer $\mathbb{P}(X_A = X_B)$.

c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X_B \geqslant k)$. En déduire $\mathbb{P}(X_A \geqslant X_B)$.

21. On effectue des lancers de dé équilibré indépendants et on appelle « succès » l'obtention d'un « 6 ». Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le temps d'attente du n-ième succès.

a) Déterminer la loi de X_n. *(On pourra commencer par déterminer $X_n(\Omega)$, puis dénombrer le nombre d'issues de l'événement $(X_n = n+k)$ où $k \in \mathbb{N}$).*

b) En déduire que $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^k = 5^n$.

22. Un péage comporte 10 guichets numérotés de 1 à 10. Le nombre de voitures N, arrivant au péage en 1 heure, suit une loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$. On suppose de plus que les conducteurs choisissent leur file au hasard et indépendamment des autres. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de voitures se présentant au guichet n° 1 en une heure.

a) Quelle est la probabilité qu'une voiture qui arrive au péage se dirige vers le guichet n° 1 ?

b) Calculer $\mathbb{P}_{(N=n)}(X_1 = k)$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$. Et pour tout $k > n$?

c) Justifier que $\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum\limits_{n=k}^{+\infty} \mathbb{P}_{(N=n)}(X_1 = k) \cdot \mathbb{P}(N=n)$.

Puis montrer que $\mathbb{P}(X_1 = k) = \mathbf{e}^{-\lambda}\left(\frac{1}{10}\right)^k \frac{\lambda^k}{k!} \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^n \frac{\lambda^n}{n!}$.

d) En déduire la loi de X_1, son espérance et sa variance.

FONCTIONS GÉNÉRATRICES

23. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de POISSON de paramètre $\lambda > 0$.

a) Calculer $\mathbb{E}\big(X(X-1)\dots(X-r+1)\big)$.

b) Retrouver ce résultat par les fonctions génératrices.

c) Reprendre l'exercice lorsque X suit une loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$.

24. Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(X=k) = ak^2\frac{\lambda^k}{k!}$$

où λ est un réel > 0 donné et a un réel à déterminer.

a) En supposant qu'une telle variable puisse être définie, quelle est sa fonction génératrice ?

b) En déduire la valeur de a.

c) Calculer l'espérance de X.

25. Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = a\mathbf{e}^{1+t^2}$.

a) Déterminer a.

b) Donner la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

26. On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de VARD i.i.d. suivant toutes une loi de BERNOULLI de paramètre p.
Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on note S_m la variable aléatoire déterminant le nombre d'essais jusqu'à l'obtention de m succès :

$$S_m = k \iff X_1 + \cdots + X_k = m \text{ et } X_1 + \cdots + X_{k-1} < m$$

a) Déterminer la loi et la fonction génératrice de S_1.

b) Même question avec $S_m - S_{m-1}$ pour $m \geqslant 2$.

c) Déterminer la fonction génératrice de S_m puis la loi de S_m.

27. Soit X une VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ et G_X sa fonction génératrice.
Justifier que G_X est définie en 1 et en -1.
Montrer que $\mathbb{P}(\text{X est paire}) = \dfrac{G_X(1) + G_X(-1)}{2}$ et que $\mathbb{P}(\text{X est impaire}) = \dfrac{G_X(1) - G_X(-1)}{2}$.

28. Deux joueurs lancent deux dés équilibrés. On veut déterminer la probabilité que les sommes des deux jets soient égales. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires déterminant les valeurs des dés lancés par le premier joueur et Y_1 et Y_2 celles associées au deuxième joueur. On étudie donc l'événement $(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

a) Montrer que $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2) = \mathbb{P}(14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2 = 14)$.

b) Déterminer la fonction génératrice de la variable à valeurs naturelles $Z = 14 + X_1 + X_2 - Y_1 - Y_2$.

c) En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X_1 + X_2 = Y_1 + Y_2)$.

INÉGALITÉS PROBABILISTES

29. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de VARD à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérances finies et telles que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n) = 0$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = 1$.

30. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes avec X_n suivant une loi de BERNOULLI de paramètre p_n. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p_i\right| < \varepsilon\right) = 1$$

31. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de POISSON de paramètre λ.
Montrer que $\mathbb{P}(X \geqslant \lambda + 1) \leqslant \lambda$.

32. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de VARD indépendantes suivant toutes la loi $\mathscr{B}(p)$. On pose, pour $k \in \mathbb{N}^*$, $Y_k = X_k X_{k+1}$.

a) Donner la loi de Y_k ainsi que son espérance et sa variance.

b) Soient $i, j \in \mathbb{N}^*$, $i \neq j$.Discuter, selon les valeurs de i et j, de l'indépendance de Y_i et Y_j. Déterminer $\mathrm{Cov}(Y_i, Y_j)$.

c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $Z_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n)$. Calculer l'espérance et la variance de Z_n.

d) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}\big(|Z_n - p^2| \geqslant \varepsilon\big) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

33. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce de monnaie supposée équilibrée n fois de suite.

a) À l'aide de l'inégalité de BIENAYMÉ-TCHÉBYTCHEV, trouver une condition suffisante sur n pour que la fréquence de FACE obtenus soit strictement comprise entre 0,4 et 0,6 avec une probabilité supérieure ou égale à 95%.

b) Au bout de 1 000 lancers, on observe une proportion de PILE de 0,65. La pièce est-elle vraiment équilibrée ?

34. On utilise un dé cubique équilibré. Déterminer le nombre de lancers nécessaires pour pouvoir affirmer avec un risque d'erreur inférieur à 5% que la fréquence d'apparition du « 6 » au cours de ces lancers différera de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$.

CONCOURS

35. *CCP PSI*

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant toutes une loi de BERNOULLI de paramètre $p\in]0,1[$. Soit N une variable aléatoire telle que $N+1$ suive une loi géométrique de paramètre p. On définit la variable aléatoire Y en posant $Y=X_1+\cdots+X_N$.

a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Donner la loi de $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

b) Soient $x\in]-1,1[$ et $k\in\mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}$.

c) Déterminer la loi de Y.

36. *TPE PSI*

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On note A l'événement «X prend une valeur paire ». On pose en outre $X_0=X.1_A$ et $X_1=X.1_{\overline{A}}$.

a) Calculer P(A) et la comparer avec $\frac{1}{2}$.

b) Déterminer la fonction génératrice de X_0. Montrer que X_0 admet une espérance et la calculer.

c) Montrer que X_1 admet une espérance, la calculer et la comparer à $\mathbb{E}(X_0)$.

37. *IMT PSI*

Soient $n\in\mathbb{N}$, $a\in\mathbb{R}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifiant, pour tout $k\in\{0,\dots,n\}$, $P(X=k)=a\binom{n}{k}$.

a) Déterminer la valeur de a.

b) Déterminer l'espérance et la variance de X.

38. *IMT PSI*

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes, X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, la loi de Y sachant que $(X=n)$ est la loi binomiale de paramètres n et $p\in]0,1[$. Trouver la loi conjointe de (X,Y). En déduire la loi de Y.

39. *IMT PSI*

a) Soient $Y_1,\dots,Y_n$ des variables aléatoires i.i.d. admettant un moment d'ordre 2 et $S_n=Y_1+\cdots+Y_n$. Soit $a>0$. Montrer à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev que $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mathbb{E}(Y_1)\right|>a\right)\leqslant\frac{\mathbb{V}(Y_1)}{na^2}$.

b) On effectue des tirages avec remise d'une boule dans un sac contenant deux boules rouges et trois boules blanches. Au bout de n tirages, on compte le nombre de boules rouges obtenues. Trouver n tel qu'on ait une probabilité d'au moins 95% d'avoir une proportion de boules rouges comprise entre 0,35 et 0,45.

40. *Centrale PSI*

Soit $p\in]0,1[$. On se donne une pièce qui tombe sur pile avec la probabilité p. On la lance jusqu'à obtenir deux fois pile et on note X le nombre de faces obtenues.

a) Donner la loi de X.

b) Montrer l'existence et donner la valeur de l'espérance de X.

c) Si $X=n$, on place $n+1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne. On pioche une boule au hasard et Y désigne le numéro de la boule piochée. Donner la loi de Y et son espérance.

41. *Centrale PSI*

a) On joue à pile ou face avec une pièce truquée tombant sur pile avec une probabilité p. On note X_n le nombre de piles obtenus au bout de n lancers. Donner la loi de X_n.

b) On considère maintenant deux pièces M_1 et M_2 donnant pile avec des probabilités p_1 et p_2. On joue de la manière suivante : à chaque lancer, on joue avec la pièce M_1 si le lancer précédent a donné pile, avec M_2 sinon. Au premier lancer, on choisit l'une des deux pièces au hasard. Soit A_n l'événement : on obtient pile au n-ième lancer et $u_n=\left(P(A_n),P(\overline{A_n})\right)\in\mathbb{R}^2$.

(i) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1}.

(ii) Déterminer le comportement asymptotique de la suite (u_n).

42. *Centrale PSI*

Soient $p\in]0,1[$ et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi géométrique de paramètre p. On pose $S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$, $T_n=\dfrac{1}{S_n}$ et $m_n=\mathbb{E}(T_n)$ si elle existe.

a) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$ et $\mathbb{E}(S_n)$.

b) Montrer que $m_n\leqslant 1/n$.

c) Montrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\mathbb{E}\left(\frac{X_i}{S_n}\right)=\frac{1}{n}$.

d) Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{S_k}{S_n}\right)=1+\frac{(k-n)m_n}{p}$ si $k\geqslant n$ et $\frac{k}{n}$ sinon.

43. *Centrale PSI*

Soient $X_1,\dots,X_n$ des variables aléatoires i.i.d., ne prenant que les valeurs 1 et -1 avec la même probabilité de $\frac{1}{2}$. Soient $a_1,\dots,a_n$ des réels et $S_n=a_1X_1+\cdots+a_nX_n$.

a) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_n)$ et l'écart-type σ_n de S_n.

b) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, $\operatorname{ch} t\leqslant\exp\left(\frac{t^2}{2}\right)$.

c) Montrer que pour tout $\lambda>0$, $\mathbb{E}(\mathbf{e}^{\lambda S_n})\leqslant\exp(\lambda^2\sigma_n^2/2)$.

d) Montrer que pour tous $\lambda>0$ et $q\in\mathbb{N}^*$, on a $\mathbb{E}\left(S_n^{2q}\right)\leqslant\frac{(2q)!}{\lambda^{2q}}\exp\left(\frac{\lambda^2\sigma_n^2}{2}\right)$.

44. *Mines Ponts PSI*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ possédant une espérance.

a) Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

b) On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N. On effectue n tirages avec remise et on note X_N le plus grand des numéros tirés. Calculer $\mathbb{E}(X_N)$ sans simplifier l'expression. Trouver un équivalent quand $N \to +\infty$.

45. *Mines Ponts PSI*
On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise. On note X_k le numéro de la boule tirée à la k-ième étape. On dit qu'il y a un pic à la k-ième étape si $X_k > \max(X_1, \ldots, X_{k-1})$. On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage. On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages.

a) Déterminer $P(S_n = 1)$ et $P(S_n = n)$.

b) Soit T_k la variable indicatrice de l'événement : il y a un pic au k-ième tirage. Déterminer la loi de T_k. Donner l'espérance de S_n.

46. *Mines Ponts PSI*
Un centre d'appel contacte des personnes. Une personne décroche avec une probabilité $p \in]0, 1[$. Il y a n personnes à contacter, par des appels successifs et indépendants. On note : X_1 le nombre de personnes ayant décroché à la première vague d'appels, X_2 le nombre de personnes ayant décroché à la seconde vague d'appels (parmi les $n - X_1$ personnes restantes), etc.

a) Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

b) On définit la variable aléatoire Y_i qui donne le numéro de la vague à laquelle la i-ème personne décroche. Déterminer la loi de Y_i.

47. *Mines Ponts PSI*
Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice dont les coefficients sont des variables aléatoires $a_{i,j}$ définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et admettant toutes une espérance.

a) Dans le cas où $n = 2$, justifier l'existence de $\mathbb{E}(\det A)$. Montrer que $\mathbb{E}(\det A) = \det\left((\mathbb{E}(a_{i,j}))_{1 \leqslant i,j \leqslant n}\right)$.

b) Généraliser pour n quelconque.

c) On suppose que les $a_{i,j}$ suivent toutes la même loi. Soit $x \in \mathbb{R}$. Calculer $\mathbb{E}(\chi_A(x))$.

48. *Mines Ponts PSI*
Soit $(\Omega, \mathcal{T}, P)$ un espace probabilisé, A et B deux variables aléatoires indépendantes qui suivent une même loi géométrique de paramètre p. Déterminer la probabilité que toutes les solutions de l'équation $(E_\omega) : y'' + (A(\omega) - 1) y' + B(\omega) y = 0$ tendent vers 0 en $+\infty$.

49. *Mines Ponts PSI*
Soit N une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p. On lance N fois une pièce de monnaie équilibrée, et on note X le nombre de faces obtenues.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de X conditionnée par $(N = n)$.

b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n$.

(i) Déterminer le rayon de convergence de f.

(ii) Calculer $f(x)$ dans l'intervalle ouvert de convergence.

(iii) Déterminer la loi de X.

50. *Mines Ponts PSI*
On dispose de $p+1$ urnes $U_0, \ldots, U_p$ contenant chacune p boules ; l'urne i contient i boules blanches. On choisit une des urnes aléatoirement, et on en tire successivement n boules avec remise. On note N_p la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

a) Déterminer la probabilité que $N_p = k$ sachant qu'on a choisi l'urne i.

b) Déterminer l'espérance de N_p. Incomplet

51. *Mines Ponts PSI*
Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi : $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = \dfrac{1}{2}$.
Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit $\varepsilon > 0$.

a) Majorer $P\left(\left|\dfrac{S_n}{n}\right| \geqslant \varepsilon\right)$.

b) Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}(\mathbf{e}^{tS_n}) = \operatorname{ch}^n t$.

c) Montrer que, pour tout $t > 0$, $\operatorname{ch} t \leqslant \mathbf{e}^{t^2/2}$.

d) Montrer que, pour tout $t > 0$, $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(\dfrac{nt^2}{2} - nt\varepsilon\right)$.

e) Montrer que $P\left(\dfrac{S_n}{n} \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \exp\left(-\dfrac{n\varepsilon^2}{2}\right)$.