PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 23/09/2024 AU 27/09/2024

Compléments d'algèbre linéaire

1) Rappels de première année

Familles de vecteurs, applications linéaires, représentations matricielles, changement de base.

2) Interpolation de Lagrange

3) Trace

4) Somme de sous-espaces vectoriels

Cas de deux sous-espaces, supplémentarité, projections, symétries (rappels de première année). Cas général, somme directe (définition par l'unicité de la décomposition de 0_E, caractérisations, cas de la dimension finie).

5) Matrices par blocs

Opérations par blocs. Liens entre la stabilité de certains sous-espaces par un endomorphisme et la forme par blocs de la matrice qui le représente.
Si u et v commutent, le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre.

6) Déterminant

Rappels de première année : méthodes de calcul d'un déterminant. Propriétés. Utilisation d'un déterminant pour montrer qu'une matrice est inversible, qu'une famille de vecteurs est une base, qu'un endomorphisme est bijectif.
Exemple de déterminant tridiagonal. Déterminant de Vandermonde.

7) Polynôme d'endomorphisme/de matrice carrée

Définitions. Opérations. Cas des matrices triangulaires.
Polynôme annulateur.

Questions de cours :

(1) Une définition du cours (au choix de l'interrogateur).

(2) (a) Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(f \circ g)$ et $\mathrm{Im}(f \circ g) \subset \mathrm{Im}(f)$.

(b) Au choix de l'interrogateur parmi les implications suivantes :
- $(\mathrm{Ker}(f \circ g) = \mathrm{Ker}(g)) \Longleftrightarrow (\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0_E\})$;
- $(\mathrm{Im}(f \circ g) = \mathrm{Im}(f)) \Longleftrightarrow (\mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(g) = E)$.

(3) Donner les formules de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur et pour la matrice d'un endomorphisme. On présentera soigneusement les objets utilisés. Pas de démonstration.

(4) Soient $(a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de $(n+1)$ scalaires distincts. Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n)) \end{array}$$

est un isomorphisme **de deux façons**.

(5) Soient $(a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de $(n+1)$ scalaires distincts. Donner une expression des polynômes interpolateurs de Lagrange associés et montrer que $(L_0, \ldots, L_i)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

(6) Équivalence entre la définition de F_1, ..., F_p en somme directe et la caractérisation par l'unicité de la décomposition de tout vecteur de $\sum F_i$ (énoncé et démonstration).

(7) Si u et v commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre (démonstration).

(8) Déterminant de Vandermonde (énoncé et démonstration).