PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 07/10/2024 AU 11/10/2024

Réduction

1) <u>Éléments propres</u>

2) <u>Polynôme caractéristique</u>

3) <u>Diagonalisation</u>

- Définitions.
- Caractérisations (...). Conditions suffisantes (polynôme caractéristique scindé à racines simples ; théorème spectral)
- Diagonalisation et polynôme annulateurs. Une valeur propre est racine d'un polynôme annulateur. Caractérisations de la diagonalisabilité (...). Si u est diagonalisable, un endomorphisme induit l'est aussi.

4) <u>Trigonalisation</u>

- Définitions.
- Caractérisation.
- Pratique de la trigonalisation en petite dimension.

Questions de cours :

(1) Définition de valeur propre d'une matrice carrée. Démontrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff \mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \iff \lambda \text{ racine de } \chi_A.$$

(2) Soit u un endomorphisme de E. Soient E_1, ..., E_p des sous-espaces propres de u associés à des valeurs propres λ_1, ..., λ_p distinctes. Alors E_1, ..., E_p sont en somme directe.

(3) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$.
- Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

(4) Diagonalisation de $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (5) Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(6) Tout sur les séries géométriques.

(7) Un cas de série de Bertrand $\sum\limits_{n \geq 2} \dfrac{\ln^b(n)}{n^a}$: le cas $a < 1$, le cas $a > 1$ ou les deux si le temps le permet.

(8) Montrer à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série harmonique diverge et que $S_n \sim \ln(n)$.