**PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 14/10/2024 AU 18/10/2024**

## Suites et séries numériques

1 ) Rappels de première année sur les suites

— Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
— Exemples d'études de suites récurrentes d'ordre 1.
— Sommes de Riemann
— Théorèmes généraux sur les suites convergentes, croissances comparées, gendarmes, limite monotone, suites adjacentes.

2 ) Rappels de première année sur les séries

— Définitions, vocabulaire (sommes partielles, convergence/divergence, reste, convergence absolue). Condition nécessaire de convergence.
— Théorèmes généraux sur les séries convergentes. Lien suite/série.
— Séries de référence : géométriques, exponentielle, Riemann (harmonique avec $S_n \sim \ln(n)$, la constante d'Euler a été vue).
— Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs. Utilisation de la convergence absolue.
— Technique de comparaison série/intégrale sur des exemples. Un graphique bien fait suffira à justifier les inégalités.

3 ) Résultats de deuxième année sur les séries

— Formules de Stirling (admis).
— Règle de d'Alembert.
— Théorème spécial des séries alternées : convergence, signe et encadrement de la somme, signe et encadrement du reste. Sur des exemples, on utilise la méthode par éclatement.
— Produit de Cauchy (admis).

Questions de cours :

(1) Tout sur les séries géométriques (avec démonstration).

(2) Un cas de série de Bertrand $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln^b(n)}{n^a}$ : le cas $a < 1$, le cas $a > 1$ ou les deux si le temps le permet.

(3) Montrer à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série harmonique diverge et que $S_n \sim \ln(n)$.

(4) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$. On note alors $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Montrer la relation : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ S(z)S(z') = S(z + z')$.
On ne demande pas de montrer que la somme de la série est $\exp(z)$ (fait en cours avec Taylor-Lagrange).

(5) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + u_n)$.
Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature.