PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 04/11/2024 AU 08/11/2024

Suites et séries numériques

Programme de la semaine dernière.

Probabilités

1) Dénombrabilité - Sommabilité

Aucune question ni aucun exercice ne doit porter spécifiquement sur ces sujets, uniquement introduits pour calculer des sommes dans le cadre du calcul des probabilités. Dans le cas de familles de réels positifs, les calculs pourront être entrepris directement, la finitude de la somme justifiant *a posteriori* la sommabilité.

2) Vocabulaire des probabilités

- Expérience aléatoire, univers, tribu. Espace probabilisable, événements (éléments de la tribu). Vocabulaire lié aux événements.
- Variable aléatoire discrète. $X(\Omega)$ est appelée *image de* X. Notations des événements relatifs à X.

3) Espaces probabilisés

- Définition d'une probabilité. Propriétés fondamentales.
- Système quasi-complet. Système complet.
- Continuité croissante/décroissante. Sous-additivité.

4) Probabilités conditionnelles

- Définition. Notation.
- Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formule de Bayes

Questions de cours :

(1) Montrer à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série harmonique diverge et que $S_n \sim \ln(n)$.

(2) Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$. On note alors $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.
Montrer la relation : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ S(z)S(z') = S(z+z')$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1+u_n)$.
Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature.

(4) On considère une pièce équilibrée lancée jusqu'à obtenir Pile. On modélise ce jeu en notant $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire en considérant qu'on lance la pièce indéfiniment. Calculer de deux manières la probabilité que le jeu se termine :

  (a) En utilisant les événements B_n : "obtenir Pile au moins une fois lors des n premiers lancers".

  (b) En utilisant les événements $X = n$ où X est le rang d'apparition du premier Pile si celui-ci apparaît et qui vaut $+\infty$ sinon.

(5) On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. Si on obtient Pile au n-ième tirage, on pioche un ticket dans une urne contenant n tickets dont un seul est gagnant.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile et qui prend la valeur $+\infty$ si on n'obtient jamais Pile (on ne peut alors pas gagner !). On note G l'événement "piocher le ticket gagnant dans l'urne".

  (a) Calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $(X = n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.

  (b) Montrer que $P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. On admet que $P(G) = \ln(2)$.

  (c) Sachant que le ticket gagnant a été pioché, calculer la probabilité que l'urne n'ait contenu qu'un seul ticket.