PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 11/11/2024 AU 15/11/2024

Probabilités

1) Dénombrabilité - Sommabilité

2) Vocabulaire des probabilités

3) Espaces probabilisés

4) Probabilités conditionnelles

5) Loi d'une variable aléatoire

- Distribution de probabilités. Définition de la loi d'une variable aléatoire discrète et caractérisation par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in X(\Omega)}$.
- Lois usuelles de deuxième année : loi de Poisson, loi géométrique.
- Fonction de variable(s) aléatoire(s).
- Couples de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. n-uplet de variables aléatoires.

6) Indépendance

- Événements indépendants (deux événements). Famille d'événements indépendants.
- Variables aléatoires indépendantes (deux variables). Définition, caractérisation. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Famille de variables aléatoires indépendantes. Définition et caractérisations.
- Lemme des coalitions.
- Suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid).

Questions de cours :

(1) On considère une pièce équilibrée lancée jusqu'à obtenir Pile. On modélise ce jeu en notant $\Omega = \{P,F\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire en considérant qu'on lance la pièce indéfiniment. Calculer de deux manières la probabilité que le jeu se termine :

  (a) En utilisant les événements B_n : "obtenir Pile au moins une fois lors des n premiers lancers".

  (b) En utilisant les événements $X=n$ où X est le rang d'apparition du premier Pile si celui-ci apparaît et qui vaut $+\infty$ sinon.

(2) On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. Si on obtient Pile au n-ième tirage, on pioche un ticket dans une urne contenant n tickets dont un seul est gagnant.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile et qui prend la valeur $+\infty$ si on n'obtient jamais Pile (on ne peut alors pas gagner !). On note G l'événement "piocher le ticket gagnant dans l'urne".

  (a) Calculer $P(X=n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et en déduire que $(X=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.

  (b) Montrer que $P(G)=\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n2^n}$. On admet que $P(G)=\ln(2)$.

  (c) Sachant que le ticket gagnant a été pioché, calculer la probabilité que l'urne n'ait contenu qu'un seul ticket.

(3) Dans une population, 1 personne sur 10000 est atteinte d'une maladie (on dit
que la prévalence est de 10^{-4}). Un test de dépistage est proposé, positif à 99% chez un individu malade et positif à 0.1% chez un individu sain. Devez-vous vous inquiéter d'un patient dont le test est positif ?

(4) Définition d'un système quasi-complet d'événements. Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales dans le cas d'un tel système.

(5) Définition, espérance et variance de la loi géométrique et/ou de la loi de Poisson (au choix de l'interrogateur).

(6) Si X et Y sont deux var indépendantes telles que $X\sim\mathcal{P}(\lambda)$ et $Y\sim\mathcal{P}(\mu)$, alors $X+Y\sim\mathcal{P}(\lambda+\mu)$.