PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 25/11/2024 AU 29/11/2024

Probabilités

Programme de la semaine dernière.

Espérance - Variance

Programme de la semaine dernière.

Intégration sur un intervalle

(1) (a) Fonctions continues par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale. Linéarité, positivité, Chasles, inégalité triangulaire.

(b) Théorème fondamental du calcul intégral : version pour une fonction continue par morceaux ; version pour une fonction continue.

(2) Intégrales généralisées.

(a) Définition(s), exemples, fonctions de référence.

(b) Théorèmes de comparaison pour des fonctions positives.

(c) Linéarité, positivité, Chasles.

(d) Intégration par parties, changement de variable.

(3) Intégrabilité (= absolue convergence)

(a) Définition. Lien avec la convergence de l'intégrale généralisée + inégalité triangulaire.

(b) Critère de nullité.

(c) $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(d) Fonctions de référence et théorèmes de comparaison.

Questions de cours :

(1) On suppose que $E(X^2) < +\infty$. Montrer que X est d'espérance finie, définir la variance et démontrer que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.

(2) Énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Application : démontrer la loi faible des grands nombres.

(3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

(4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature des intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\, dt$.

(5) On définit *la fonction Gamma* par

$$\Gamma : \; x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, dt.$$

Déterminer le domaine de définition de Γ et calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(6) Montrer que l'intégrale suivante est convergente et calculer sa valeur : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ (on pourra utiliser le chgt de variable $t = \cos^2(x)$).