Espaces vectoriels normés

Programme de la semaine dernière.

Suites de fonctions

- (1) Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment. Liens entre ces convergences.
- (2) Caractérisations de la convergence uniforme :
 - (a) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :
 - les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I à partir d'un certain rang n_0 ;
 - la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n \geq n_0}$ converge vers 0.
 - (b) La suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement s'il existe une suite numérique $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que :
 - à partir d'un certain rang, $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ pour tout $x \in I$;
 - $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$.
- (3) La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée.
- (4) Théorème de continuité de la limite uniforme (version globale et version locale).
- (5) Théorème d'interversion limite/intégrale sur un segment. Théorème de convergence dominée.
- (6) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$ pour les suites de fonctions.

Questions de cours :

- (1) Montrer qu'une des trois normes usuelles sur E de dimension finie muni d'une base est une norme (au choix de l'interrogateur).
- (2) Montrer qu'une des trois normes usuelles sur $E = \mathcal{C}^0([a; b], \mathbb{K})$ est une norme (au choix de l'interrogateur). Le lemme $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ ($\lambda \geq 0$) a été démontré en cours et pourra être utilisé sans démonstration.
- (3) Montrer qu'une boule est convexe (fermée ou ouverte au choix de l'interrogateur).
- (4) Définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme. La CVU de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f entraîne la CVS de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f .

- (5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $g_n : [0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto \frac{x^2}{1 + nx}$$

Étudier la convergence uniforme (éventuellement sur tout segment) de la suite de fonctions $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

- (6) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_n : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R} .$$

$$x \mapsto n^2 x^n (1 - x)$$

- (a) Montrer que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement.
- (b) Calculer $\int_0^1 f_n(t) dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (c) En déduire que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément.
- (7) Énoncé de n'importe quel théorème sur les suites de fonctions.