PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 10/02/2025 AU 14/02/2025

Séries de fonctions

Programme de la semaine dernière.

Séries entières

(1) Définitions - Notations ($\sum a_n z^n$ *désigne aussi bien une série numérique que la série entière (=série de fonctions), on sera précis sur le vocabulaire utilisé).* Extension de l'expression *converge simplement* au cas de la variable complexe. DSE de exp, $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$.

(2) Rayon de convergence ($= \sup\{r \in [0, +\infty[\mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ si cet ensemble est majoré, $+\infty$ sinon). Lemme d'Abel. Théorème fondamental sur le lien entre rayon de convergence et convergence de la série entière.

(3) Théorème de comparaison ($|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_n$) - Règle du n^α - Règle de d'Alembert pour les séries entières (non lacunaires) - Exemples d'utilisation du critère de d'Alembert pour les séries numériques.

(4) Opérations entre séries entières : combinaison linéaire, produit.

(5) Régularité de la somme pour une série entière de la variable réelle. CVN sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Primitivation. Classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R; R[$ et dérivation terme à terme. Unicité des coefficients et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. DSE de $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, arctan.

(6) Développement en série entière : série de Taylor, si une fonction est DSE, alors la série entière est la série de Taylor. Taylor avec reste intégral/Taylor-Lagrange. DSE de cos, sin, ch, sh. Utilisation d'une équa diff pour obtenir le DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

(7) Opérations entre fonctions DSE. Exemples de calculs de sommes.

(8) Séries entières de la variable complexe : la série géométrique et la série exponentielle (rappels). Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence (ADMIS).

(9) Fonctions génératrices : définition, CVN et continuité sur $[-1; 1]$ ($= E(t^X)$), caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1; 1[$; caractérisation de la loi par la fonction génératrice ; fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.
X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et $E(X) = G'_X(1)$.
X^2 est d'espérance finie ssi $G''_X(1)$ existe et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
Dans le cas particulier où $R > 1$, ces deux formules s'appliquent.

À l'attention des interrogateurs : pas de théorème radial au programme de PSI.

Questions de cours :

En première question de cours, demander deux DSE usuels sur l'intervalle ouvert de convergence.

(1) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3}$.

(2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.

(3) Rayon de convergence et somme de $\sum \mathrm{ch}(n) z^n$ et de $\sum n^2 x^n$.

(4) Calculer la fonction génératrice de X dans les deux cas suivants : $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0; 1[$) et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0; +\infty[$).
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement deux lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Quelle est la loi de $X + Y$?