

## Séries entières

- (1) Définitions - Notations ( $\sum a_n z^n$  désigne aussi bien une série numérique que la série entière (=série de fonctions), on sera précis sur le vocabulaire utilisé). Extension de l'expression *converge simplement* au cas de la variable complexe. DSE de  $\exp, x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$ .
- (2) Rayon de convergence ( $= \sup\{r \in [0, +\infty[ \mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$  si cet ensemble est majoré,  $+\infty$  sinon). Lemme d'Abel. Théorème fondamental sur le lien entre rayon de convergence et convergence de la série entière.
- (3) Théorème de comparaison ( $|a_n| \leq |b_n|, a_n = O(b_n), a_n = o(b_n), a_n \sim b_n$ ) - Règle du  $n^\alpha$  - Règle de d'Alembert pour les séries entières (non lacunaires) - Exemples d'utilisation du critère de d'Alembert pour les séries numériques.
- (4) Opérations entre séries entières : combinaison linéaire, produit.
- (5) Régularité de la somme pour une série entière de la variable réelle. CVN sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Primitivation. Classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - R; R[$  et dérivation terme à terme. Unicité des coefficients et  $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ . DSE de  $x \mapsto \ln(1 \pm x), \arctan$ .
- (6) Développement en série entière : série de Taylor, si une fonction est DSE, alors la série entière est la série de Taylor. Taylor avec reste intégral/Taylor-Lagrange. DSE de  $\cos, \sin, \text{ch}, \text{sh}$ . Utilisation d'une équation diff pour obtenir le DSE de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ .
- (7) Opérations entre fonctions DSE. Exemples de calculs de sommes.
- (8) Séries entières de la variable complexe : la série géométrique et la série exponentielle (rappels). Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence (ADMIS).
- (9) Fonctions génératrices : définition, CVN et continuité sur  $[-1; 1]$  ( $= E(t^X)$ ), caractère  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - 1; 1[$ ; caractérisation de la loi par la fonction génératrice; fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.  
 $X$  est d'espérance finie ssi  $G_X$  est dérivable en 1 et  $E(X) = G'_X(1)$ .  
 $X^2$  est d'espérance finie ssi  $G''_X(1)$  existe et  $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$ .  
 Dans le cas particulier où  $R > 1$ , ces deux formules s'appliquent.

À l'attention des interrogateurs : pas de théorème radial au programme de PSI.

Questions de cours :

En première question de cours, demander deux DSE usuels.

- (1) Rayon de convergence et somme de  $\sum \text{ch}(n)z^n$  et de  $\sum n^2 x^n$ .
- (2) DSE de  $x \mapsto \ln(1-x)$ , de  $\arctan$  (avec démonstrations).
- (3) DSE de  $x \mapsto (1+x)^\alpha$  (dans le cas où  $\alpha \notin \mathbb{N}$ ).
- (4) Calculer la fonction génératrice de  $X$  dans les deux cas suivants :  $X \sim \mathcal{G}(p)$  ( $p \in ]0; 1[$ ) et  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  ( $\lambda \in ]0; +\infty[$ ).  
 Soient  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement deux lois de Poisson de paramètres  $\lambda > 0$  et  $\mu > 0$ . Quelle est la loi de  $X + Y$  ?