PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 10/03/2025 AU 14/03/2025

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

(1) Isométries vectorielles.
   (a) Définition et caractérisations. Exemple des symétries orthogonales (en particulier les réflexions). Groupe orthogonal.
   (b) Soit $u \in O(E)$. Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ l'est aussi. Conséquence matricielle.
   (c) $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1;1\}$, les sous-espaces propres sont orthogonaux.

(2) Matrices orthogonales.
   (a) Définition et caractérisations. Groupe orthogonal. Déterminant. Groupe spécial orthogonal.
   (b) f est une isométrie vectorielle ssi sa matrice dans une bon est orthogonale. Déterminant d'une isométrie.
   (c) Rotations. Groupe spécial orthogonal de E.

(3) Orientation d'un espace vectoriel. Caractérisations des bon directes.

(4) Classification des isométries d'un plan.
   (a) Produit mixte (cas $n = 2$).
   (b) Description de $O(2)$ et $SO(2)$.
   (c) Description des rotations d'un plan euclidien. Définition d'une mesure de l'angle orienté (u, v). Utilisation du produit scalaire et du produit mixte pour l'obtenir.
   (d) Les isométries indirectes d'un plan sont les réflexions.

(5) Classification des isométries d'un espace euclidien de dimension 3.
   (a) Produit mixte (cas $n = 3$).
   (b) Produit vectoriel. Définition par le théorème de représentation de Riesz. Bilinéarité, antisymétrie, relations entre u, v et $u \wedge v$, norme, formule dans une bond, utilisation pour construire une bond.
   (c) Orientation d'une droite, d'un plan de l'espace ($n = 3$).
   (d) Réduction des matrices de $SO(3)$.
   (e) Description des rotations d'un espace euclidien de dimension 3. On dit que *r est la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur unitaire w*. Détermination de w et θ par la trace de r et le signe de $[x, r(x), w]$.

(6) Endomorphismes auto-adjoints.
   (a) Définition. Caractérisation des projecteurs orthogonaux, des symétries orthogonales. Caractérisation matricielle.
   (b) Théorème spectral (version endomorphisme et version matricielle). Diagonalisation pratique d'une matrice symétrique.
   (c) Endomorphisme auto-adjoint positif (défini positif). Matrice symétrique positive (définie positive). Lien entre les deux. Caractérisation par le signe des valeurs propres. Cas pratique si $n = 2$.

Questions de cours :

(1) Soit $f \in O(E)$. Montrer que $\mathrm{Sp}(f) \subset \{-1;1\}$ et que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont orthogonaux.

(2) Décrire l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.

(3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. f est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

(4) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que si F est stable par f, alors $F^{\perp}$ l'est également. Montrer que les deux sous-espaces propres de f sont orthogonaux.

(5) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. f est autoadjoint positif (respectivement défini positif) si et seulement si les valeurs propres de f sont positives (respectivement strictement positives).