Chapitre 1 - Compléments d'algèbre linéaire

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

I – Rappels de première année

Les notions ne sont pas présentées dans l'ordre naturel de leur construction. On s'autorise par exemple à parler de déterminant avant de l'avoir défini. La présentation rigoureuse de tous ces objets a été faite en première année. Ici, on se contente de rappeler des définitions et résultats (et il en manque!), sans démonstration.

1) Familles de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition I.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- On définit le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1, \dots, u_n)$ (on dit aussi *engendré par les vecteurs* u_1, ..., u_n) noté $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ par :

$$\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i,\ (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n \right\} = \left\{ x \in E \mid \exists (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i \right\}.$$

- Ainsi, $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs u_1, ..., u_n.
- On convient que le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille vide est $\{0_E\}$.
- On appelle rang de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ la dimension de $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E si $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E$, autrement dit si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_i.

Définition I.1.2. On suppose que $n \ge 1$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.

- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre ou que les vecteurs u_1, ..., u_n sont linéairement indépendants si, pour tous λ_1, ..., λ_n dans $\mathbb{K}$, on a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$ seulement si tous les λ_i sont nuls, autrement dit :

$$\forall (\lambda_i)_{1 \le i \le n} \in \mathbb{K}^n,\ \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E\right) \Longrightarrow (\forall 1 \le i \le n,\ \lambda_i = 0).$$

- Dans le cas contraire, il existe une liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires **non tous nuls** telle que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u_i = 0_E$. Une telle relation est appelée relation de liaison et on dit alors que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée ou que les vecteurs u_1, ..., u_n sont linéairement dépendants.
- On convient que la famille vide est libre.

Définition I.1.3.
Une famille finie de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E.

Exercice I.1.4.

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + 2t = 0 \text{ et } 2x - y + z - t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base.

Théorème I.5. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que E est de dimension n et est muni d'une base $\mathscr{B}_0$. Soit $\mathscr{B}$ une famille de n vecteurs de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) $\mathscr{B}$ est une base de E ;

(2) $\mathscr{B}$ est une famille libre ;

(3) $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de E ;

(4) $\mathscr{B}$ est de rang n (rang qui peut être obtenu matriciellement) ;

(5) la matrice A de la famille $\mathscr{B}$ dans la base $\mathscr{B}_0$ est inversible ;

(6) le déterminant de A est non nul.

Exercice I.1.6. Notons $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. On considère la famille

$$\mathscr{B} = (P_0 = (X-1)(X-2)(X-3), P_1 = X(X-2)(X-3), P_2 = X(X-1)(X-3), P_3 = X(X-1)(X-2)).$$

Démontrer que $\mathscr{B}$ est une base de E et déterminer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base.

Théorème I.7. *Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B} = (e_i)_{1\le i\le n}$ une famille de vecteurs de E.*

- *$\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur x de E, il existe une et une seule famille de scalaires $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ telle que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.*
- *On dit alors que $(\lambda_i)_{1\le i\le n}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $\mathscr{B}$.*
- *On appelle alors matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ la matrice $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*
- *L'application suivante est un isomorphisme :*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & E \\ \begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix} & \longmapsto & x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \end{array}.$$

Remarque. Ce résultat montre l'importance de connaître une base. Elle permet de faire du calcul vectoriel en utilisant uniquement les coordonnées des vecteurs. On pourra par exemple utiliser les coordonnées pour démontrer une colinéarité, une liaison entre vecteurs, la liberté d'une famille,... puisqu'une relation entre vecteurs se traduira par la même relation entre les matrices-colonnes de coordonnées.

⚠ Attention, les coordonnées sont un atout précieux mais on ne confondra pas un vecteur x de E avec ses coordonnées dans une base, on écrira :

Le vecteur x a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour coordonnées dans $\mathscr{B}$

OU

Les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

OU

La matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$.

2) Applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition I.2.8. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

(1) On appelle image de f le sous-espace vectoriel de F suivant :
$$\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(x),\ x \in E\}.$$
Lorsque $\mathrm{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle rang de f la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

(2) On appelle noyau de f le sous-espace vectoriel de E suivant :
$$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Exercice I.2.9. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E.

(1) Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.

(2) Montrer que :
- $(\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}(f)) \iff (\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0_E\})$;
- $(\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}(g)) \iff (\mathrm{Ker}(g) + \mathrm{Im}(f) = E)$.

Théorème I.10. *Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire.*

(1) f est injective si et seulement si $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
On rappelle que l'inclusion $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$ est toujours vérifiée.

(2) f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$.
On rappelle que l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset F$ est toujours vérifiée.

(3) Si E est de dimension finie et que $\mathscr{B}$ est une base de E, alors la famille $f(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Théorème I.11. *Supposons que E et F soient $\boxed{\text{de même dimension finie}}$ n. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) f est injective ;

(2) f est surjective ;

(3) f est un isomorphisme ;

(4) $\mathrm{rg}(f) = n$.

On utilisera en particulier ce résultat si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème I.12 (Formule du rang)**.**

(1) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Si E_0 est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ dans E (c'est-à-dire $E = E_0 \oplus \mathrm{Ker}(u)$), alors u induit un isomorphisme de E_0 sur $\mathrm{Im}(u)$: l'application $\begin{array}{ccc} E_0 & \to & \mathrm{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$ *est un isomorphisme.*

(2) On suppose que $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors u est de rang fini, $\mathrm{Ker}(u)$ est de dimension finie et
$$\dim(E) = \mathrm{rg}(u) + \dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Ker}(u)).$$

Exercice I.2.13. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ et on définit l'application f de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par : $\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \ f(M) = AM$.

(1) Montrer que f est linéaire.

(2) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

(3) Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Im}(f)$.

Définition - Théorème I.2.14. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathscr{B} = (e_i)_{1\leq i\leq n}$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E qui vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(1) $\dim(H) = n-1$;

(2) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$;

(3) pour tout vecteur x n'appartenant pas à H : $E = H \oplus \mathrm{Vect}(x)$;

(4) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$;

(5) il existe une famille de scalaires non tous nuls $(a_1, \dots, a_n)$ telle que, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ de E :

$$x \in H \iff \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = 0.$$

Cette relation caractérise les vecteurs de H, on dit que c'est une *équation de H dans la base $\mathscr{B}$*.

Exemple I.2.15. Soit $n \geq 2$. Notons $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que $H = \left\{ M \in E \mid \sum_{i=1}^{n} (M)_{i,i} = 0 \right\}$ est un hyperplan de E.

3) Représentations matricielles

On a déjà défini plus haut la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Les matrices permettent de représenter les objets de l'algèbre linéaire *en dimension finie* : vecteurs, familles de vecteurs, bases, applications linéaires.

Définition - Théorème I.3.16 (Matrice d'une famille de vecteurs)**.**

- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
  Soit $\mathscr{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E.
  Il existe une unique famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ de scalaires tels que, pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, $x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.
- La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice de la famille $\mathscr{F}$ dans la base $\mathscr{B}$ et se note $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
- Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, les coordonnées de x_j dans la base $\mathscr{B}$ sont les coefficients de la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.
- Le rang de $\mathscr{F}$ est celui de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$.

En particulier, si $n = p$, la famille $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est inversible. Dans ce cas, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ est appelée matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{F}$ et se note $P(\mathscr{B}, \mathscr{F})$ ou $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{F}}$.

Définition - Théorème I.3.17 (Matrice représentative d'une application linéaire)**.**

- Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
  On considère une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de F.
  Soit $u : E \longrightarrow F$ une application linéaire de E dans F.
- On appelle matrice (représentative) de u dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ (matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) définie par :
  $$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p)).$$
- Pour tout $j \in [\![1;p]\!]$, la j-ème colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est formée des coordonnées dans la base $\mathscr{C}$ du vecteur $u(e_j)$.
  On rappelle que les vecteurs $u(e_j)$ engendrent $\mathrm{Im}(u)$.
- La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ a le même rang que u (quelles que soient les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ choisies !).
  En particulier, si $n = p$, l'application u est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ est inversible.
  Dans ce cas : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{B}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)^{-1}$.
- Si $E = F$ (et donc $p = n$), u est un endomorphisme et on choisit souvent $\mathscr{B} = \mathscr{C}$. On note alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$ (matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$).

Méthode. ✌

Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice qui représente cette famille dans une base donnée.
Le rang d'une application linéaire est égal au rang de la matrice qui représente cette application dans des bases données.

Il est donc essentiel de savoir déterminer le rang d'une matrice qui est la dimension de l'espace engendré par les colonnes (ou par les lignes) :

- réaliser des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes ne change pas le rang d'une matrice ;
- on ne change pas le rang d'une matrice en supprimant une ligne/colonne colinéaire à une autre (en particulier une ligne/colonne nulle) ;
- le rang d'une matrice *échelonnée* est égal au nombre de *pivots*.
  Ce vocabulaire ne figure plus au programme officiel, le rang d'une telle matrice pourra être donné directement.

Exercice I.3.18. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}-1&0&1&0\\2&5&-2&-5\\6&5&4&3\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}1&-1&2\\3&-3&6\\-1&1&-2\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}2&1&3&-3\\-1&2&1&4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Théorème I.19 (Théorème de représentation)**.**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.
On considère une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F.

- *L'application* $\Psi : \begin{array}{ccc}\mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\\ u & \longmapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\end{array}$ *est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*
- *La linéarité de Ψ se traduit par :*
$$\forall (u,v)\in\mathscr{L}(E,F)^2,\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u+v)=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)+\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v);$$
$$\forall u\in\mathscr{L}(E,F),\ \forall\lambda\in\mathbb{K},\ \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u)=\lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u).$$
- *La bijectivité de Ψ indique qu'une application linéaire est caractérisée par la donnée de sa matrice dans des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ données.*

Définition I.3.20.
- Soit $M\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à M l'unique application linéaire $u:\mathbb{K}^p\longrightarrow\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est M.
- On appelle alors image de M et noyau de M respectivement l'image et le noyau de u.
  On obtient le noyau de M en résolvant directement l'équation $MX=0_{\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Dans ce cas, on confond un élément de $\mathbb{K}^p$ (respectivement de $\mathbb{K}^n$) et un élément de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (respectivement de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), ce qui est courant.
  Les colonnes de M sont alors des vecteurs de $\mathrm{Im}(M)$ (elles engendrent même $\mathrm{Im}(M)$).
- D'après la formule du rang, on a $p=\dim(\mathrm{Ker}(M))+\dim(\mathrm{Im}(M))=\dim(\mathrm{Ker}(M))+\mathrm{rg}(M)$.

Théorème I.21 (Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire)**.**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. On considère une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{C}$ de F.
Soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$. On note $A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$.
Soit $x\in E$. On note X la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.
Alors AX est la matrice-colonne des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathscr{C}$.

Remarque. ✌ Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Considérons le système linéaire $AX=0$ (par exemple pour déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ ou $\mathrm{Ker}(u)$).

(1) D'après la formule du rang, l'espace vectoriel des solutions est de dimension $p-\mathrm{rg}(A)$
(on dit parfois *"nombre d'inconnues" moins "nombre d'équations indépendantes"*).

(2) Si on note C_1, C_2, ..., C_p les colonnes de A et $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_p\end{pmatrix}$, alors $AX=x_1C_1+x_2C_2+\cdots+x_pC_p$. Cette observation permet souvent de déterminer une (ou plusieurs) solution par observation des colonnes de A, sans avoir à résoudre explicitement le système !

Exercice I.3.22. (1) On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$. On déterminera des bases de ces espaces.

(2) On note $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ P & \longmapsto & \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) + P''(0) \end{pmatrix} \end{array}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$. L'application g est-elle injective ? surjective ?

Proposition I.3.23 (Matrice de la composée de deux applications linéaires)**.**
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
On considère $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{B}_2$ et $\mathscr{B}_3$ respectivement des bases de E, F et G.
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$. On a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_3}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1,\mathscr{B}_2}(u).$$

En particulier, si u est un endomorphisme de E, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u^k) = (\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_1}(u))^k$.

4) Formules de changement de base

Théorème I.24 (Changement de base pour les coordonnées d'un vecteur)**.**
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. On considère deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E.
Soit $x \in E$. On note X la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$
et on note X' la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}'$.
On a alors $X = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} X'$ (et donc $X' = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} X = (P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'})^{-1} X$).

Théorème I.25 (Changement de bases pour la matrice d'une application linéaire)**.**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
On considère $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ deux bases de F. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(u)$.
On a alors $A' = (P_{\mathscr{C} \to \mathscr{C}'})^{-1} \times A \times P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ (et donc $A = P_{\mathscr{C} \to \mathscr{C}'} \times A' \times (P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'})^{-1}$).

Corollaire I.4.26 (Cas des endomorphismes)**.**
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On considère $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E et on note $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.
On a alors $A' = P^{-1}AP$ (et donc $A = PA'P^{-1}$).
On peut retenir plus facilement $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$.

Définition - Théorème I.4.27. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A' \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que <u>$A$ et A' sont semblables</u> s'il existe une matrice inversible P telle que $A = PA'P^{-1}$ (ou $A' = P^{-1}AP$).
D'après ce qui précède, deux matrices A et A' sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Deux matrices semblables ont le même rang, le même déterminant et la même trace (voir la suite du cours).

Proposition I.4.28. *Soient A, B et C trois matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*
Si A est semblable à B et B est semblable à C, alors A est semblable à C.

Exercice I.4.29. On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que A et D sont semblables.
On commencera par considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

(2) Expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = PDP^{-1}$.

(3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n puis la matrice A^n.

III – Somme de sous-espaces vectoriels

1) Rappels de première année : somme de 2 sous-espaces vectoriels

Définition III.1.1.
- Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
  On définit la somme de F et G par
  $$F+G=\{y+z,\ (y,z)\in F\times G\}.$$
  $F+G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G.
- Si $F\cap G=\{0_E\}$, on dit que F et G sont en somme directe et on note $F+G=F\oplus G$.
- Si $F\oplus G=E$, on dit que F et G sont supplémentaires dans E.

Théorème III.2. *Soit E un espace vectoriel.*

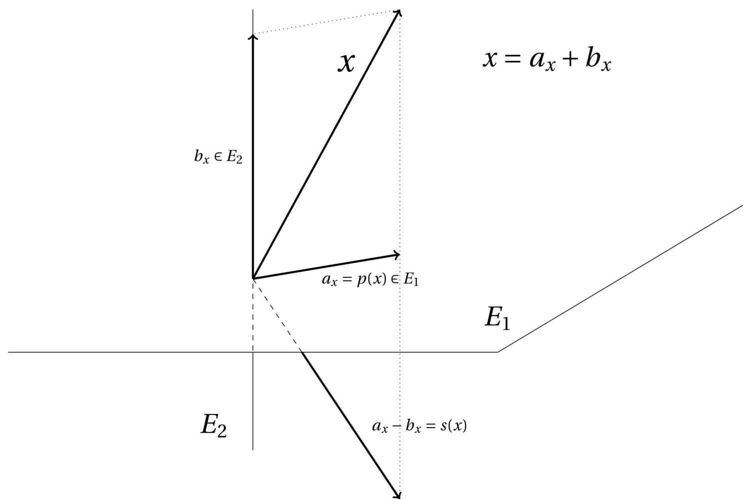
(1) Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si :
pour tout $x\in E$, il existe un unique couple $(a_x,b_x)\in F\times G$ tel que $x=a_x+b_x$.

(2) Supposons que E est de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E respectivement munis de bases $(e_1,\dots,e_p)$ et $(e_{p+1},\dots,e_n)$.
F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la famille $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ est une base de E.
On dit que cette base est adaptée à la somme directe $F\oplus G$.

(3) Supposons que E est de dimension finie.
Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(F)+\dim(G)=\dim(E)$ *et* $F\cap G=\{0_E\}$.
En général, on a $\dim(F+G)=\dim(F)+\dim(G)-\dim(F\cap G)$.

Exercice III.1.3.
On note E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $F=\mathrm{Vect}(\sin,\cos)$ et $G=\{f\in E\mid f(0)=f'(0)=0\}$.
Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Définition III.1.4. Soient $\boxed{E_1 \text{ et } E_2 \text{ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de } E}$.
- On appelle projection sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E tel que $p_{|E_1}=\mathrm{Id}_{E_1}$ et $p_{|E_2}=0_{\mathscr{L}(E_2,E)}$ (application nulle).
- Soit $x\in E$. Il existe un unique couple $(a_x,b_x)\in E_1\times E_2$ tel que $x=a_x+b_x$. On a alors $p(x)=a_x$ et $b_x=x-p(x)$.
  $p(x)$ est donc l'unique vecteur de E_1 tel que $x-p(x)\in E_2$.
- On a $\mathrm{Im}(p)=E_1=\mathrm{Ker}(p-\mathrm{Id}_E)=\{x\in E\mid p(x)=x\}$ et $\mathrm{Ker}(p)=E_2=\{x-p(x),\ x\in E\}$.



Définition III.1.5. On appelle projecteur de E tout endomorphisme f de E tel que $f\circ f=f$.

Théorème III.6. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*

(1) Si f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2, alors $f \circ f = f$ (f est un projecteur).

(2) Si f est un projecteur, alors $\mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f) = E$ et f est la projection sur $\mathrm{Im}(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Définition III.1.7. Soient $\boxed{E_1 \text{ et } E_2 \text{ deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de } E}$.

- On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme s de E tel que $s_{|E_1} = \mathrm{Id}_{E_1}$ et $s_{|E_2} = -\mathrm{Id}_{E_2}$.
- Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(a_x, b_x) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = a_x + b_x$. On a alors $s(x) = a_x - b_x$.
- En reprenant les notations de la définition de *projection*, on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$.
- On a $E_1 = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $E_2 = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

Théorème III.8. *Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.*

(1) Si f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2, alors $f \circ f = \mathrm{Id}_E$. En particulier $f \in GL(E)$ et $f^{-1} = f$.

(2) Si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, alors $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E) = E$ et f est la symétrie par rapport à $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice III.1.9. ✌ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note également $s : A \longmapsto A^T$.

(1) Démontrer que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E.

(2) Déterminer une base de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathscr{A}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

(3) En déduire $\det(s)$ et $\mathrm{tr}(s)$.

V – Déterminant

1) Rappels de première année

Méthode. ✌

Grâce aux règles suivantes, on simplifie le calcul du déterminant d'une matrice carrée : faire apparaître des zéros (avant de développer par rapport à une ligne/colonne), faire apparaître des factorisations ...

- Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
- Un déterminant dont une colonne/ligne est formée de zéros est nul.
- Un déterminant dont une colonne/ligne est combinaison linéaire des autres est nul.
- L'échange de deux colonnes/lignes multiplie le déterminant par (-1).
- Si on multiplie une colonne/ligne par $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant est multiplié par λ.
- Si on multiplie tous les coefficients d'une matrice par λ, le déterminant est multiplié par λ^n.
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne/ligne un multiple d'une autre.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}$. On rappelle la formule de développement par rapport à la ligne L_{i_0} :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{p} (-1)^{i_0+j} (A)_{i_0,j} m_{i_0,j}$$

  où $(A)_{i,j}$ désigne le coefficient de A en position (i,j) et $m_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}$. On rappelle la formule de développement par rapport à la colonne C_{j_0} :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j_0} (A)_{i,j_0} m_{i,j_0}.$$

Exercice V.1.1 (Calcul d'un déterminant tridiagonal). Soient α et β deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le déterminant (à n lignes et colonnes)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & & & \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & & \mathbf{0} \\ & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}.$$

(1) Écrire une relation entre Δ_{n+2}, Δ_{n+1} et Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(2) En déduire Δ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, α et β.

Proposition V.1.2.
- *Pour toutes matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a*
$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$
- *Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si* $\det(A) \neq 0$. *Si A est inversible, alors*
$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$
- *Deux matrices semblables ont le même déterminant.*
- *Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.*

Exercice V.1.3. Soient a, b et c trois réels. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la matrice A suivante soit inversible :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+b & c+a & b+c \\ ab & ca & bc \end{pmatrix}$$

Exercice V.1.4. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $B - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
Pour chaque valeur de λ obtenue, déterminer $\mathrm{Ker}(B - \lambda I_3)$. On donnera une base de chacun de ces sous-espaces.

Définition - Théorème V.1.5. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathscr{B}$ une base de E.

(1) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
Le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans $\mathscr{B}$ se note $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$ et : $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

(2) Soit $\mathscr{B}'$ une base de E. Pour toute famille de n vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$, on a :

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}(u_1, \dots, u_n),$$

autrement dit : $\det_{\mathscr{B}} = \det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \det_{\mathscr{B}'}$ (égalité entre applications).

(3) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Remarque. Même si le cours est axé sur les méthodes pratiques de calcul ainsi que les diverses utilisations des déterminants, on rappelle la définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base $\mathscr{B}$ de E :

$\det_{\mathscr{B}}$ est l'unique application de E^n dans $\mathbb{K}$ qui soit n-linéaire, alternée et qui vérifie $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Proposition V.1.6.

- *Soit f un endomorphisme de E. Le déterminant de la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie et se note tout simplement* $\det(f)$.
- $\forall f \in \mathscr{L}(E)$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$.
- $\forall (f, g) \in \mathscr{L}(E)^2$, $\det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
- *Soit f un endomorphisme de E. f est un isomorphisme (un automorphisme de E donc) si et seulement si* $\det(f) \neq 0$.
- *Soit f un automorphisme de E. Alors,* $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$.

Remarque. Même si le cours est axé sur les méthodes pratiques de calcul ainsi que les diverses utilisations des déterminants, on rappelle la définition du déterminant d'un endomorphisme de E de dimension finie :

$\det(f)$ est l'unique scalaire tel que, pour toute base $\mathscr{B}$ de E et toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E :
$\det_{\mathscr{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathscr{B}}(u_1, \dots, u_n)$.