Chapitre 2 - Réduction

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

I – Éléments propres

1) Le cas des endomorphismes

Définition I.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de u s'il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

(2) Soit $x \in E$. On dit que x est un vecteur propre de u si $x \neq 0_E$ et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\boxed{u(x) = \lambda x}$.
Dans ce cas, on dit que x est **un** vecteur propre de u associé à λ ou que λ est **la** valeur propre de u associée à x.

(3) L'ensemble des valeurs propres de u est appelé spectre de u et se note $\mathrm{Sp}(u)$.

L'égalité encadrée est appelée *équation aux éléments propres*. On peut parfois chercher des valeurs propres et vecteurs propres par analyse-synthèse en commençant par supposer cette égalité vérifiée pour obtenir des conditions nécessaires sur λ et x.

Exemple I.1.2. (1) On suppose que $E \neq \{0_E\}$. Soit $\alpha \in \mathbb{K}$. On note $h = \alpha \,\mathrm{Id}_E$ l'homothétie de rapport α. Alors $\mathrm{Sp}(h) = \{\alpha\}$.

(2) On suppose que $E \neq \{0_E\}$. Soit p un projecteur de E. On suppose que $p \neq \mathrm{Id}_E$ et $p \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$. Alors $\mathrm{Sp}(p) = \{0, 1\}$.

(3) On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ suivant : $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5x - 3y \\ -3x + 5y \end{pmatrix}$.

(a) Montrer que $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de f.

(b) Vérifier que (e_1, e_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et écrire la matrice de f dans la base (e_1, e_2).

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'image par f^n du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(4) On note $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'endomorphisme D de E défini par : $\forall f \in E,\ D(f) = f'$.
Déterminer le spectre de D.

Proposition I.1.3. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. On note $D = \mathrm{Vect}(x)$ la droite engendrée par x.
Le vecteur x est un vecteur propre de u si et seulement si D est stable par u.*

Définition - Théorème I.1.4. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit λ une valeur propre de u.
On note $E_\lambda(u) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E)$.
$E_\lambda(u)$ est un sous-espace vectoriel de E appelé l'espace propre de u associé à λ.
$E_\lambda(u)$ est l'ensemble des vecteurs propres de u associés à la valeur propre λ auquel on a rajouté le vecteur nul.

Remarque.
Si $\lambda \in \mathbb{K}$ n'est pas une valeur propre de u, les notions de vecteur propre et d'espace propre associés à λ n'ont pas de sens.
Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E) = \{0_E\}$. On peut retenir que : $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \mathrm{Ker}(u - \lambda \,\mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$.
En particulier, u est injectif si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de E. Dans le cas contraire, $E_0(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

Méthode. ✍

Si on vous demande de *déterminer les éléments propres d'un endomorphisme* u, on attend que vous déterminiez les valeurs propres de u (c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(u)$) ainsi que l'espace propre associé à chacune de ces valeurs propres.

Exemple I.1.5. Reprendre les quatre exemples précédents et déterminer les éléments propres dans chaque cas.

2) Le cas des matrices carrées

Dans cette partie, on adapte les définitions précédentes aux matrices carrées.

Définition I.2.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(1) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de A s'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que X est non nul et $AX = \lambda X$.

(2) Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On dit que X est un vecteur propre de A si X est non nul et s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\boxed{AX = \lambda X}$.
Dans ce cas, on dit que X est **un** vecteur propre de A associé à λ ou que λ est **la** valeur propre de A associée à X.
L'égalité encadrée est appelée *équation aux éléments propres.*

(3) L'ensemble des valeurs propres de A est appelé spectre de A et se note $\mathrm{Sp}(A)$.

Exemple I.2.7. (1) On note $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de A.

(2) On note $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer le spectre de B.

Remarque. ⚠ Si A est une matrice à coefficients réels, elle peut être considérée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Ce choix, qui n'a pas de conséquence sur le calcul de la trace ou du déterminant, peut avoir des conséquences sur le spectre. Pour préciser, on pourra écrire $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ pour l'ensemble des valeurs propres réelles et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ pour l'ensemble des valeurs propres complexes.

Définition - Théorème I.2.8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit λ une valeur propre de A.
On note $E_\lambda(A) = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\right\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$.
Dans cette définition, on identifie - comme souvent - les éléments de $\mathbb{K}^n$ (n-uplets écrits en colonne) et ceux de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (matrices-colonnes).
$E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (ou de $\mathbb{K}^n$) appelé espace propre (ou sous-espace propre) de A associé à λ.
$E_\lambda(A)$ est l'ensemble des vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ auquel on a rajouté le vecteur nul.

Remarque. ✌

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ n'est pas une valeur propre de A, les notions de vecteur propre et d'espace propre associés à λ n'ont pas de sens.
Dans ce cas, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{0_E\}$. On peut retenir que :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_E\}.$$

En particulier A est inversible si et seulement si 0 n'est pas valeur propre de A. Dans le cas contraire, $E_0(A) = \mathrm{Ker}(A)$.

Méthode. ✍

Si on vous demande de *déterminer les éléments propres d'une matrice carrée* A, on attend que vous déterminiez les valeurs propres de A (c'est-à-dire $\mathrm{Sp}(A)$) ainsi que l'espace propre associé à chacune de ces valeurs propres.
Les éléments propres de A sont les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A.

Exemple I.2.9. Reprendre les deux exemples précédents et déterminer les éléments propres dans chaque cas.

Théorème I.10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
Soit $x \in E$. On note X la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathscr{B}$.
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

(1) *λ est valeur propre de u si et seulement si λ est valeur propre de A, en particulier* $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$ *;*

(2) *x est un vecteur propre de u associé à λ si et seulement si X est un vecteur propre de A associé à λ ;*

(3) *si λ est valeur propre de u (c'est-à-dire de A !), alors* $\dim(E_\lambda(u)) = \dim(E_\lambda(A))$.

Exemple I.2.11. Déterminer les éléments propres de la matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

3) Propriétés

Proposition I.3.12.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient u et v deux endomorphismes de E. On suppose que $\boxed{u \text{ et } v \text{ commutent}}$ ($u \circ v = v \circ u$).
Alors les sous-espaces propres de u sont stables par v (et vice-versa !).
En particulier, on retrouve que les sous-espaces propres de u sont stables par u ; on sait que l'endomorphisme induit par u sur $E_\lambda(u)$ est λ Id.

Théorème I.13. (1) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres **distinctes** *de u, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(u), \ldots, E_{\lambda_p}(u)$ sont en somme directe :*

$$\sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(u).$$

(2) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ sont p valeurs propres **distinctes** *de A, alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_1}(A), \ldots, E_{\lambda_p}(A)$ sont en somme directe :*

$$\sum_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(A) = \bigoplus_{k=1}^{p} E_{\lambda_k}(A).$$

Corollaire I.3.14. (1) *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
Toute famille de p vecteurs propres de u associés à des valeurs propres **distinctes** *de u est libre.*

(2) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.*
Toute famille de p vecteurs propres de A associés à des valeurs propres **distinctes** *de A est libre.*

II – Polynôme caractéristique

On commence ici par rappeler et compléter les résultats de la partie précédente concernant les éléments propres.

Théorème II.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *λ est valeur propre de u ;*

(2) *il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$;*

(3) $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$ *;*

(4) *$u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective.*

Théorème II.2. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* **de dimension finie**. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *λ est valeur propre de u ;*

(2) *il existe $x \in E \setminus \{0_E\}$ tel que $u(x) = \lambda x$;*

(3) $\operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) \neq \{0_E\}$ *;*

(4) *$u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas injective ;*

(5) *$u - \lambda \operatorname{Id}_E$ n'est pas bijective ;*

(6) $\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) < \dim(E)$ *;*

(7) $\det(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = 0$ *;*

(8) $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - u) = 0$.

Théorème II.3. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *λ est valeur propre de A ;*

(2) *il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que X est non nul et $AX = \lambda X$;*

(3) $\operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ *;*

(4) $\operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n$ *;*

(5) *$A - \lambda I_n$ n'est pas inversible ;*

(6) $\det(A - \lambda I_n) = 0$ *;*

(7) $\det(\lambda I_n - A) = 0$.

Ces résultats nous incitent à étudier $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - u)$ ou $\det(\lambda I_n - A)$ pour déterminer les valeurs propres de u ou de A ...

1) Définition

Lemme II.1.4. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $x \mapsto \det(xA+B)$ est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n.*

Théorème II.5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. L'application*

$$\begin{array}{rccl} \chi_A : & \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \det(xI_n - A) \end{array}$$

est une fonction polynomiale de degré n et, pour tout $x \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(x) = \det(xI_n - A) = x^n - \mathrm{tr}(A)x^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A).$$

Définition II.1.6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle polynôme caractéristique de A le polynôme noté χ_A de $\mathbb{K}[X]$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{K},\ \chi_A(x) = \det(xI_n - A).$$

✌ Dans cette définition, on confond polynôme et fonction polynomiale associée, on notera : $\boxed{\chi_A = \det(XI_n - A)} = X^n - \mathrm{tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(A)$.

Remarque. (1) ⚠ Parfois, on rencontre une autre définition du polyôme caractéristique, comme le polynôme associé à la fonction $x \mapsto \det(A - xI_n)$. Cela ne changerait pas grand-chose à la suite de ce cours, tous les coefficients du polynôme étant alors multipliés par $(-1)^n$.

(2) Dans le cas $n = 2$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on pourra utiliser avantageusement la formule : $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$.

Proposition II.1.7.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice triangulaire de coefficients diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

(2) Deux matrices carrées semblables ont le même polynôme caractéristique.

(3) Une matrice carrée a le même polynôme caractéristique que sa transposée.

Définition II.1.8. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle polynôme caractéristique de u et on note χ_u le polynôme caractéristique de la matrice représentative de u dans n'importe quelle base de E.
En particulier : $\boxed{\chi_u(X) = \det(X\,\mathrm{Id}_E - u)} = X^n - \mathrm{tr}(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.

2) Liens avec les valeurs propres - Multiplicité

Proposition II.2.9. *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les valeurs propres de u sont les racines de χ_u, le polynôme caractéristique de u.*

*(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A, le polynôme caractéristique de A.*

Définition II.2.10. (1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.

On appelle multiplicité de λ et on note $m_\lambda(u)$ l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_u.

On rappelle que $m_\lambda(u) \geq 1$, que $(X-\lambda)^{m_\lambda(u)}$ divise χ_u et que $(X-\lambda)^{m_\lambda(u)+1}$ ne divise pas χ_u.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.

On appelle multiplicité de λ et on note $m_\lambda(A)$ l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_A.

On rappelle que $m_\lambda(A) \geq 1$, que $(X-\lambda)^{m_\lambda(A)}$ divise χ_A et que $(X-\lambda)^{m_\lambda(A)+1}$ ne divise pas χ_A.

Remarque. (1) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. P est dit **scindé** dans $\mathbb{K}[X]$ s'il peut s'écrire comme un produit de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ de degré 1. On rappelle qu'en général, la somme des multiplicités des racines de P est inférieure au degré de P. En cas d'égalité, le polynôme est scindé :

$$P = a\prod_{i=1}^{p}(X-\alpha_i)^{m_i}$$

où les α_i sont les racines distinctes de P de multiplicité m_i et a est le coefficient dominant de P.

(2) Un endomorphisme d'un espace de dimension n possède au plus n valeurs propres (comptées avec leur multiplicité). De même, une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres (comptées avec leur multiplicité).

(3) Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

(4) Deux matrices transposées l'une de l'autre ont le même polynôme caractéristique donc les mêmes valeurs propres avec la même multiplicité.

(5) ⚠ Si A est une matrice **à coefficients réels**, elle peut être considérée dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ ou dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. De la même manière, son polynôme caractéristique peut être considéré dans $\mathbb{R}[X]$ ou dans $\mathbb{C}[X]$.
Si on se contente de chercher ses racines réelles, on obtiendra les valeurs propres réelles de A.
Si on cherche les racines complexes du polynôme caractéristique, on obtiendra les valeurs propres complexes de A.
En particulier, $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(A) \subset \mathrm{Sp}_\mathbb{C}(A)$ et si λ est une valeur propre complexe de A, alors sa conjuguée $\overline{\lambda}$ en est une également (avec la même multiplicité que λ).

Remarque. ✌ Supposons que χ_A est **scindé** (ce qui est toujours le cas dans $\mathbb{C}[X]$). Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ les p racines distinctes de χ_A, de multiplicités respectives $m_{\lambda_1}(A), \ldots, m_{\lambda_p}(A)$, de sorte que $\chi_A = \prod_{i=1}^{p}(X-\lambda_i)^{m_{\lambda_i}(A)}$. On a alors :

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{p} m_{\lambda_i}(A)\lambda_i \quad \text{(somme des valeurs propres)} \quad \text{et} \quad \det(A) = \prod_{i=1}^{p} \lambda_i^{m_{\lambda_i}(A)} \quad \text{(produit des valeurs propres)}.$$

La première relation peut permettre de trouver la dernière valeur propre de A si on en connaît déjà $n-1$ (comptées avec leur multiplicité).

Lemme II.2.11. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*
Soit F un sous-espace vectoriel de E non réduit à $\{0_E\}$ et **stable par** *u. Notons $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.*
Le polynôme caractéristique de $\tilde{u}$ divise celui de u, autrement dit : $\chi_{\tilde{u}} \mid \chi_u$.

Théorème II.12. *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$.*
On a alors :
- $\dim(E_\lambda(u)) = \dim(E) - \mathrm{rg}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$;
- $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(u)$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$.
On a alors :
- $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$;
- $1 \leq \dim(E_\lambda(A)) \leq m_\lambda(A)$.

✌ *En particulier, si λ est une racine simple ($m_\lambda = 1$), alors le sous-espace propre associé à λ est de dimension* 1.

Exercice II.2.13. Déterminer les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$. Même question pour $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Théorème II.14 (Cayley-Hamilton)**.** *[ADMIS]*

(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
χ_u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
χ_A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$.

3) Exercice complémentaire : les matrices compagnes

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On suppose que P est unitaire et de degré n. Il existe donc a_0, ..., a_{n-1} dans $\mathbb{K}$ tels que

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

On appelle matrice compagne de P la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$.

(1) On note $\mathscr{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est A.
   (a) Vérifier que, pour tout $k \in [\![2;n]\!]$, $f^{k-1}(e_1) = e_k$.
   (b) Démontrer que $P(f)(e_1) = 0_{\mathbb{K}^n}$ et déduire de la question précédente que $P(f)(e_k) = 0_{\mathbb{K}^n}$ pour tout $k \in [\![2;n]\!]$.
   (c) Conclure que P est un polynôme annulateur de f et donc de A.

(2) Démontrer que P est le polynôme caractéristique de A.
   En échangeant les deux questions, on aurait pu utiliser le théorème de Cayley-Hamilton. L'intérêt est de le vérifier sur cet exemple, ce type de calcul intervenant dans une preuve complète du théorème.

III – Diagonalisation

1) Définition

Définition III.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
On dit que u est diagonalisable si u vérifie l'une des assertions équivalentes suivantes :

(1) il existe une base de E formée de vecteurs propres de u ;

(2) il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonale.

Exemple III.1.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Les homothéties, les projecteurs et les symétries de E sont des endomorphismes diagonalisables.

L'endomorphisme $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 5x-3y \\ -3x+5y \end{pmatrix} \end{array}$ est diagonalisable.

Définition III.1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que A est diagonalisable si A vérifie une des assertions équivalentes suivantes :

(1) A est semblable à une matrice diagonale ;

(2) il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}AP$ est diagonale ;

(3) il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

Théorème III.4. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors u est diagonalisable si et seulement si A est diagonalisable.*

Remarque.
Supposons qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit **diagonalisable**.

Elle est alors semblable à une matrice $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\boxed{\chi_A = \chi_D = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)}$ (scindé).

Ainsi, **les λ_i sont les valeurs propres de A** et, en regroupant les λ_i qui sont égaux, on obtient $\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X-\lambda)^{m_\lambda(A)}$.

On rappelle que :

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda \quad \text{(somme des valeurs propres)} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)} \quad \text{(produit des valeurs propres).}$$

Il n'y a pas unicité de la matrice D. Toutefois, les coefficients diagonaux de D étant les valeurs propres de A et apparaissant autant de fois que leur multiplicité, on ne peut obtenir une autre matrice D' diagonale semblable à A qu'en permutant les coefficients diagonaux de D.

Proposition III.1.5 (Condition nécessaire)**.** *Si un endomorphisme (respectivement une matrice carrée) est diagonalisable, alors son polynôme caractéristique est scindé.*

2) Différentes caractérisations ou conditions suffisantes

Théorème III.6 (Caractérisation)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
u est diagonalisable si et seulement si la somme (directe) de ses sous-espaces propres est égale à E.

Théorème III.7 (Caractérisation)**.** *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à $\dim(E)$
(c'est-à-dire $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = \dim(E)$).

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions de ses sous-espaces propres est égale à n
(c'est-à-dire $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$).

Exemple III.2.8. (1) Les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ et, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont diagonalisables.

(2) ⚠ Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable alors qu'elle est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
On dit que cette matrice est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ mais n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Théorème III.9 (Caractérisation)**.** *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.*
u est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si,
pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $\dim(E_\lambda(u)) = m_\lambda(u)$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$ et si,
pour toute valeur propre $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on a $\dim(E_\lambda(A)) = m_\lambda(A)$.

Remarque. ✌ On rappelle que d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, un polynôme de degré au moins égal à 1 est **toujours scindé sur** $\mathbb{C}$.

Méthode. ✍

On souhaite répondre à la question suivante : *Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -5 \end{pmatrix}$ est diagonalisable et diagonaliser A.*

On vous demande de déterminer les matrices P (inversible) et D (diagonale) telles que $A = PDP^{-1}$.

- <u>Version détaillée</u>

  Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X-4 & 2 \\ -7 & X+5 \end{vmatrix} \underset{=}{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{vmatrix} X+3 & -X-3 \\ -7 & X+5 \end{vmatrix} = (X+3)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -7 & X+5 \end{vmatrix} = (X+3)\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -7 & X-2 \end{vmatrix} = (X+3)(X-2).$$

  Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 2\}}$. On aurait également pu écrire $\chi_A = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 + X - 6 = (X-2)(X+3)$.

Déterminons les espaces propres associés à ces deux valeurs propres (par deux méthodes pour s'exercer).
Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^2$).

$$AX = -3X \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} 4x-2y & = & -3x \\ 7x-5y & = & -3y \end{array} \right. \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} 7x-2y & = & 0 \\ 7x-2y & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, $\boxed{E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}\right)}$ (système homogène de rang 1).

$A - 2I_2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 7 & -7 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc son noyau est de dimension 1 et on observe que $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à ce noyau. Ainsi $\boxed{E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)}$.

χ_A est scindé et, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $m_\lambda = \dim(E_\lambda(A))$ donc, par caractérisation, $\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$.
On aurait pu utiliser le fait que $m_\lambda = 1$ pour chaque valeur propre pour conclure de la même façon sans aucun calcul. On pourra même bientôt dire que χ_A est scindé à racines simples donc A est diagonalisable !

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ de $\mathbb{R}^2$ est A. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ (formée de vecteurs propres de A donc de u).
Par caractérisation (de la diagonalisabilité), $\mathbb{R}^2 = E_{-3}(u) \oplus E_2(u)$ et donc, par caractérisation (de la somme directe à l'aide de bases), $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
Notons $\boxed{P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}_{can}$ à $\mathscr{B}$ (inversible donc).

On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_{can}}(u) = A$ et $\boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$ donc, d'après les formules de changement de base : $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

- Version attendue Dans cette version (suffisante), on ne mentionne pas l'endomorphisme u.

Comme dans la version précédente, on détermine les éléments propres de A et on justifie le fait que A est diagonalisable. Le début est donc identique, jusqu'à l'étape $\boxed{\textit{A est diagonalisable}}$.

Par caractérisations, $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Notons $\boxed{P = P_{\mathscr{B}_{can} \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})}$ et $\boxed{D = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}$.
D'après les formules de changement de base : $\boxed{A = PDP^{-1}}$.

Théorème III.10 (Théorème spectral (ADMIS)). *[Condition suffisante]*
Soit A une matrice **symétrique réelle**. *Alors A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.*
Cet énoncé sera revu et complété plus tard dans l'année. Bien sûr une matrice réelle peut être diagonalisable sans être symétrique !

Exercice III.2.11. Montrer que $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -2\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{pmatrix}$ est diagonalisable. Diagonaliser A.

3) Un cas particulier : n valeurs propres distinctes

Théorème III.12 (Condition suffisante)**.** *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*

Si *le polynôme caractéristique χ_u est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$,* **alors** *u est diagonalisable.*

On utilise ce théorème lorsque u possède n valeurs propres distinctes.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Si *le polynôme caractéristique χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{K}$,* **alors** *A est diagonalisable.*

On utilise ce théorème lorsque A possède n valeurs propres distinctes.

Remarque. ⚠ En général, si un endomorphisme u (ou une matrice) est diagonalisable,
alors son polynôme caractéristique est $\prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{m_\lambda(u)} = \prod_{\lambda\in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)^{\dim(E_\lambda(u))}$ qui est **scindé** mais pas nécessairement à racines simples !

Remarque. ✌ Dans le cas de n valeurs propres distinctes, tous les sous-espaces propres sont de dimension 1. On peut le démontrer de plusieurs manières :

- La somme des dimensions des n sous-espaces propres est égale à n donc chacune de ces dimensions doit être égale à 1.
- Pour chaque valeur propre λ, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m_\lambda(u) = 1$ donc $\dim(E_\lambda(u)) = 1$.

Exercice III.3.13 (Détermination des racines carrées d'une matrice). On note $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}5 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}$.

On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A.

Le but de l'exercice est de trouver toutes les matrices B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = A$.

(1) Démontrer que A est diagonalisable et déterminer D diagonale et $P \in GL_2(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

(2) Procédons par analyse-synthèse en supposant l'existence de $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$.
On note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à B.

(a) Vérifier que u et v commutent.

(b) Donner une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de u.
Déduire de la question précédente que les vecteurs de $\mathscr{B}$ sont aussi des vecteurs propres de v.

(c) Justifier qu'il existe une matrice diagonale R telle que $B = PRP^{-1}$.

(d) Montrer que $R^2 = D$ et en déduire qu'il n'y a que 4 possibilités pour la matrice R et donc pour la matrice B.

(3) Vérifier que les 4 matrices B obtenues à la question précédente vérifient bien $B^2 = A$.

La recherche de racines carrées est un sujet difficile qui ne se traite pas toujours *aussi bien* que dans cet exercice. Par exemple, toutes les matrices de la forme $\begin{pmatrix}1 & \alpha\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ sont des racines carrées de $I_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. La situation est compliquée par le fait que I_2 n'a pas 2 valeurs propres distinctes.

4) Une application de la diagonalisation : le calcul des puissances d'une matrice carrée

Exercice III.4.14. On considère trois suites réelles u, v et w définies par $u_0 = v_0 = w_0 = 1$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} &= u_n - 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} &= -u_n \qquad + w_n \\ w_{n+1} &= u_n - v_n + 2w_n. \end{cases}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

(1) Déterminer une matrice $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = AX_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_n = A^n X_0$.

(2) Montrer que A est diagonalisable. On déterminera une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

(3) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$ et en déduire le terme général des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode. ✌
Si on connaît un polynôme B annulateur de A (éventuellement obtenu en observant A^0, A, A^2, ...), on peut déterminer le reste R de la division euclidienne de X^n par B (on connaît son degré maximal et on peut l'évaluer en les racines de P).
On a alors $A^n = R(A)$.

IV – Diagonalisation et polynômes annulateurs

Théorème IV.1. ✌ *Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.*

(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Soit $x \in E$.

(a) Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

(b) Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

(a) Si $AX = \lambda X$, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

(b) Si P est un polynôme annulateur de A, alors toute valeur propre de A est racine de P.

⚠ *D'après ce théorème, les valeurs propres sont des racines du polynôme annulateur. En revanche, toutes les racines du polynôme annulateur ne sont pas nécessairement des valeurs propres!*

Exercice IV.0.2. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non réduit à $\{0_E\}$. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E. On note s la symétrie par rapport à F parallèlement à G. Après avoir exhibé un polynôme annulateur de s, déterminer les éléments propres de s.

Théorème IV.3 (Caractérisation)**.** *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*
u est diagonalisable si et seulement si u admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si A admet un polynôme annulateur scindé à racines simples.

Remarque. ✌ Pour essayer d'obtenir un polynôme annulateur de u, on peut calculer les premières puissances de u ($u^0 = \mathrm{Id}_E$, $u^1 = u$, u^2, ...) et essayer de combiner ces puissances pour obtenir l'endomorphisme nul.
Même remarque pour les matrices carrées.

Exercice IV.0.4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Soit A une matrice de E **de trace non nulle**.
On définit l'application :

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & \operatorname{tr}(A)M - \operatorname{tr}(M)A \end{array}.$$

(1) Montrer que f est un endomorphisme de E.

(2) Exhiber un polynôme annulateur de f. En déduire que f est diagonalisable.

(3) Déterminer une matrice diagonale représentative de f (dans une base de son choix).

Exercice IV.0.5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale par blocs. On note A_1, ..., A_s les s blocs diagonaux de A :

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_s \end{pmatrix}.$$

(1) Démontrer que si A est diagonalisable alors, pour tout $i \in [\![1; s]\!]$, les matrices A_i sont diagonalisables.

(2) Démontrer que si la matrice A_i est diagonalisable pour tout $i \in [\![1; s]\!]$, alors A est diagonalisable.

Corollaire IV.0.6. *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*
u est diagonalisable si et seulement si u admet $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
A est diagonalisable si et seulement si A admet $\prod_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} (X - \lambda)$ pour polynôme annulateur.

Exemple IV.0.7. Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable.

Plus généralement, une matrice non nulle nilpotente (il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$) n'est pas diagonalisable.

Corollaire IV.0.8. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. On note $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u.
Si u est diagonalisable, alors $\tilde{u}$ est diagonalisable.

V – Trigonalisation

Définition V.0.1. (1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

On dit que u est trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est triangulaire.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est trigonalisable si A est semblable à une matrice triangulaire.

Théorème V.2. *Soit E un espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. Alors u est trigonalisable si et seulement si A est trigonalisable.*

Remarque.

Supposons qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ soit **trigonalisable**.

Elle est alors (par exemple) semblable à une matrice $T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et $\boxed{\chi_A = \chi_T = \prod_{i=1}^{n} (X - \lambda_i)}$ (scindé).

Ainsi, **les λ_i sont les valeurs propres de A** et, en regroupant les λ_i qui sont égaux, on obtient $\chi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} (X - \lambda)^{m_\lambda(A)}$.

On rappelle que :

$$\boxed{\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i} = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} m_\lambda(A)\lambda \quad \text{(somme des valeurs propres)} \quad \text{et} \quad \boxed{\det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i} = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda^{m_\lambda(A)} \quad \text{(produit des valeurs propres)}.$$

Remarque. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Si la matrice de u dans $\mathscr{B}$ est triangulaire inférieure, alors la matrice de u dans $\mathscr{B}' = (e_n, e_{n-1}, \dots, e_1)$ est triangulaire supérieure. Dans la définition précédente, la matrice triangulaire pourra donc toujours être supposée triangulaire supérieure. Ce sera souvent le cas dans la pratique.

Théorème V.3 (Caractérisation)**.** *(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* **de dimension finie**. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.*

u est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$.

En particulier, si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u est toujours trigonalisable.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

A est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$.

En particulier, une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est toujours trigonalisable.

Méthode. ✍

On souhaite répondre à la question suivante : *Montrer que la matrice* $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *est trigonalisable et trigonaliser* A.

On vous demande de déterminer des matrices P (inversible) et T (triangulaire) telles que $A = PTP^{-1}$.

Calculons le polynôme caractéristique de A :

$$\chi_A = \begin{vmatrix} X+1 & -2 & 0 \\ -2 & X-2 & 3 \\ 2 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \overset{C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3}{=} \begin{vmatrix} X-1 & -2 & 0 \\ X-1 & X-2 & 3 \\ X-1 & -2 & X-1 \end{vmatrix} = (X-1) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & X-2 & 3 \\ 1 & -2 & X-1 \end{vmatrix} \overset{C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1}{=} (X-1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & X & 3 \\ 1 & 0 & X-1 \end{vmatrix}$$

$$= (X-1) \begin{vmatrix} X & 3 \\ 0 & X-1 \end{vmatrix} = X(X-1)^2.$$

Ainsi, $\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0_1, 1_2\}}$.

On sait déjà que $\boxed{A \text{ est trigonalisable}}$ puisque χ_A est scindé. Déterminons les espaces propres associés aux deux valeurs propres (de deux manières!) pour savoir si A est diagonalisable. Dans le cas contraire, les vecteurs propres seront utiles pour construire la matrice P.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ (ou $\mathbb{R}^3$).

$$AX = 0 \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y & = & 0 \\ 2x + 2y - 3z & = & 0 \\ -2x + 2y + z & = & 0 \end{array} \right. \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} -x + 2y & = & 0 \\ 6y - 3z & = & 0 \\ -2y + z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ainsi, $\boxed{E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right)}$ (système homogène de rang 2).

$A - I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2 (non inversible car 1 est valeur propre et avec 2 colonnes non colinéaires) donc son noyau est de dimension 1 et on observe que $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ appartient à ce noyau. Ainsi $\boxed{E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)}$.

Ainsi $\dim(E_1(A)) \neq m_1(A)$ donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

Notons u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ est A.

Cherchons une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de u dans $\mathscr{B}$ soit $\boxed{T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

La forme triangulaire supérieure et les coefficients diagonaux sont contraints par ce qui a été dit plus haut dans le cours. Les deux premières colonnes résultent des dimensions des sous-espaces propres. Le choix de la dernière colonne est une indication proposée par l'énoncé.

Cherchons un vecteur $e_3 \in \mathbb{R}^3$ tel que la famille (e_1, e_2, e_3) réponde à la question. Soit $e_3 = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$u(e_3) = e_2 + e_3 \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 2y & = & 1 \\ 2x + y - 3z & = & 1 \\ -2x + 2y & = & 1 \end{array} \right. \text{ ssi } \left\{ \begin{array}{rcl} -2x + 2y & = & 1 \\ 3y - 3z & = & 2 \end{array} \right.$$

Notons (par exemple) $e_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{6} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{-1}{6} \neq 0$$

donc $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et, par construction, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = T$.

Notons $\boxed{P = P_{\mathscr{B}_{can} \to \mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$. D'après les formules de changement de base, on a $\boxed{A = PTP^{-1}}$.

Exercice V.0.4. Notons f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathscr{B}_{can}$ est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que f est trigonalisable et déterminer une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $T = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit triangulaire.

Comme dans l'exemple précédent, on fera en sorte que les coefficients de T situés juste au-dessus de la diagonale soient des 0 ou des 1 et que les autres coefficients non diagonaux soient nuls.