Théorème .1 (Cayley-Hamilton)**.** *[ADMIS]*

(1) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
χ_u est un polynôme annulateur de u : $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
χ_A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$.

Dans la démonstration suivante, on utilisera que si A la matrice compagne d'un polynôme P, alors $\chi_A = P$ est annulateur de A. Cet exercice a été traité en cours.

Démonstration. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.
Montrons que $\chi_u(u)(x) = 0_E$ pour tout $x \in E$ (ce qui montrera que $\chi_u(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$). Le résultat est immédiat si $x = 0_E$.

Soit $x \in E \setminus \{0_E\}$. Montrons que $\chi_u(u)(x) = 0_E$.

- Notons $\boxed{E_x = \{P(u)(x),\ P \in \mathbb{K}[X]\}}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, alors $XP \in \mathbb{K}[X]$ donc $\boxed{E_x \text{ est stable par } u}$.
  Notons u_x l'endomorphisme de E_x induit par u. On sait que $\boxed{\chi_{u_x} \text{ divise } \chi_u}$ par théorème.
- L'ensemble des entiers k non nuls tels que la famille $(x, u(x), \dots, u^{k-1}(x))$ soit libre contient 1 (car $x \neq 0_E$) et est majoré par n donc possède un plus grand élément. Notons p le plus grand entier non nul tel que $\boxed{\mathscr{B}_x = (x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))}$ soit libre.

  Alors $(x, u(x), \dots, u^p(x))$ est liée et il existe donc des scalaires a_0, a_1, ..., a_{p-1} tels que $u^p(x) = \sum_{k=0}^{p-1} a_k u^k(x)$.

  Ainsi, $u^p(x) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_x)$. Par une récurrence immédiate, $u^k(x) \in \mathrm{Vect}(\mathscr{B}_x)$ pour tout $k \geq p$ et donc pour tout $k \geq 0$. Finalement, tous les vecteurs de E_x appartiennent à $\mathrm{Vect}(\mathscr{B}_x)$ donc $\boxed{\mathscr{B}_x \text{ est une base de } E_x}$.
- La matrice A de u_x dans la base $\mathscr{B}_x$ est une matrice compagne (exercice : il suffit de l'écrire!) dont la dernière colonne est formée des coefficients a_0, ..., a_{p-1}. D'après l'exercice traité en cours et rappelé en préambule, $\chi_{u_x}(A) = \chi_A(A) = 0_p$ donc $\chi_{u_x}(u_x) = 0_{\mathscr{L}(E_x)}$ et enfin $\boxed{\chi_u(u_x) = 0}$ (χ_u est un multiple de χ_{u_x}).
- En conclusion, remarquons que $x \in E_x$ donc $u(x) = u_x(x) \in E_x$ donc $u^2(x) = u_x^2(x) \in E_x$ donc ... donc $u^k(x) = u_x^k(x)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate). Ainsi : $\boxed{\chi_u(u)(x) = \chi_u(u_x)(x) = 0_E}$, ce qu'on voulait et qui termine la démonstration.

□