PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 29/09/2025 AU 03/10/2025

Compléments d'algèbre linéaire

Programme de la semaine dernière.

Réduction

1) Éléments propres

- Définition des éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée. Liens entre les deux. Spectre. Une droite est stable par u ssi un vecteur directeur est vecteur propre de u.
- Si u et v commutent, les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.
- Des sous-espaces associés à des valeurs propres distinctes sont en somme directe. Des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont indépendants.

2) Polynôme caractéristique

- Caractérisations du fait d'être valeur propre en dimension finie : noyau de $u - \lambda \operatorname{Id}_E$ non réduit à 0_E, non injectivité/bijectivité de $u - \lambda \operatorname{Id}_E$, $\operatorname{rg}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) < n$, $\det(\lambda \operatorname{Id}_E - u) = 0$.
- Définition ($\chi_A = \det(XI_n - A)$), coefficient de X^{n-1}, coefficient constant. Lien avec les valeurs propres.
- Cas des matrices triangulaires. Cas de la transposée. Cas des matrices semblables -> définition du polynôme caractéristique d'un endomorphisme.
- Multiplicité d'une valeur propre. Lien avec la dimension du sous-espace propre.
- Cayley-Hamilton (admis).

3) Diagonalisation

- Définitions (endomorphismes et matrices).
- Caractérisations (sans utiliser de polynôme annulateur). Conditions suffisantes (polynôme caractéristique scindé à racines simples ; théorème spectral)
- Diagonalisation d'une matrice carrée : méthode.

L'utilisation de polynômes annulateurs pour la réduction a été vue très récemment en cours mais encore peu utilisée. De tels arguments pourront être utilisés par les étudiants mais ne sont pas attendus cette semaine.

Questions de cours :

(1) (a) Montrer que $\operatorname{Ker}(g) \subset \operatorname{Ker}(f \circ g)$ et $\operatorname{Im}(f \circ g) \subset \operatorname{Im}(f)$.

(b) Au choix de l'interrogateur parmi les implications suivantes :
- $(\operatorname{Ker}(f \circ g) = \operatorname{Ker}(g)) \iff (\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(g) = \{0_E\})$;
- $(\operatorname{Im}(f \circ g) = \operatorname{Im}(f)) \iff (\operatorname{Ker}(f) + \operatorname{Im}(g) = E)$.

(2) Donner les formules de changement de base pour les coordonnées d'un vecteur et pour la matrice d'un endomorphisme.

(3) Soient $(a_i)_{0 \le i \le n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de $(n+1)$ scalaires distincts. Montrer de deux façons que l'application suivante est un isomorphisme :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{array}.$$

(4) Si u et v commutent, alors le noyau et l'image de l'un sont stables par l'autre. En déduire que les sous-espaces propres de l'un sont stables par l'autre.

(5) Déterminant de Vandermonde (énoncé et démonstration).

(6) Définition de valeur propre d'une matrice, d'un endomorphisme. Démontrer que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \in \operatorname{Sp}(A) \iff \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\} \iff \operatorname{rg}(A - \lambda I_n) < n \iff \det(A - \lambda I_n) = 0 \iff \det(\lambda I_n - A) = 0 \iff \lambda \text{ racine de } \chi_A.$$

(7) Diagonalisation de $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.