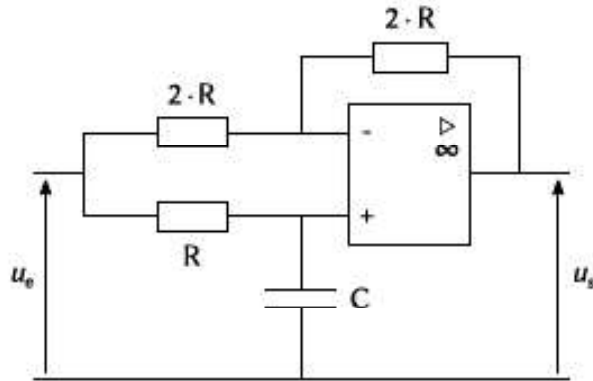


DEVOIR EN CLASSE N°1

I Filtre à ALI (IESSA PSI 2025)

Dans le montage ci-dessous, l'amplificateur opérationnel aussi appelé ALI pour Amplificateur Linéaire Intégré est idéal et fonctionne en régime linéaire.



▲ FIGURE 1

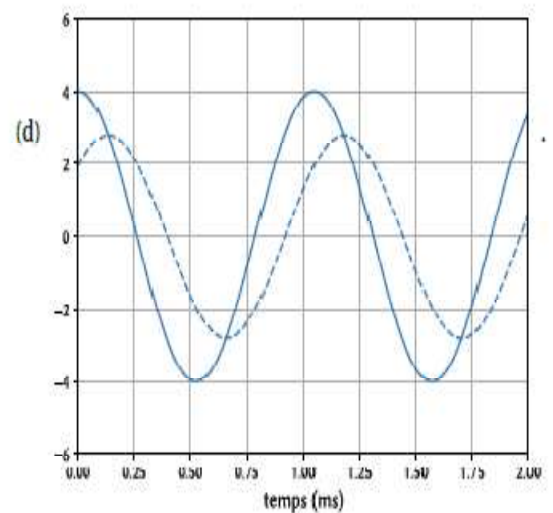
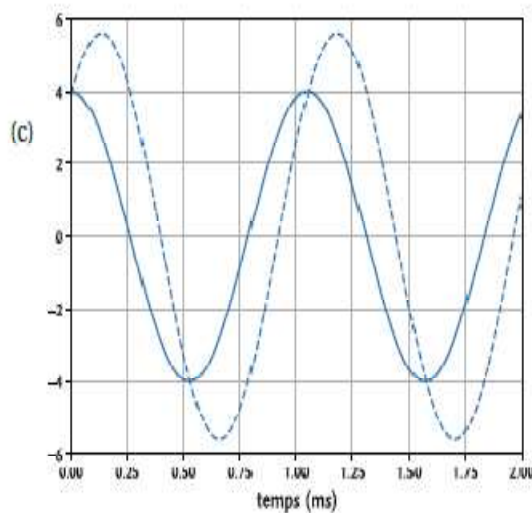
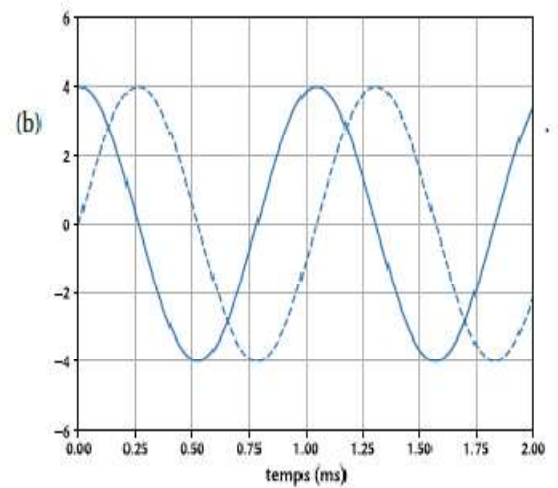
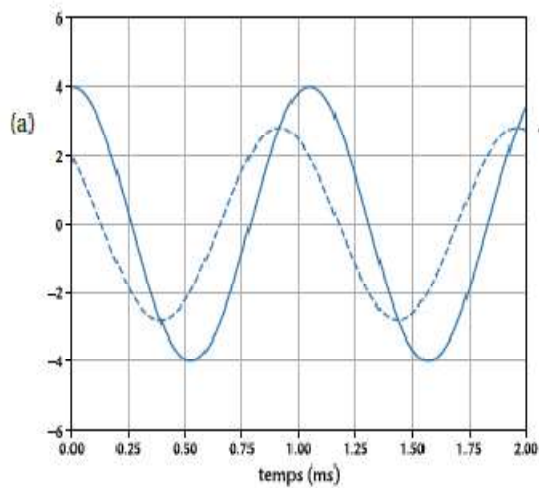
1. Par analyse haute et basse fréquence, ce filtre est un :
(a) passe-bas. (b) passe-haut. (c) passe-bande. (d) coupe-bande. (e) autre.
2. La fonction de transfert a pour expression :
(a) $\underline{H} = 2 / (1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega)$. (b) $\underline{H} = 1 / (1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega)$.
(c) $\underline{H} = j \cdot R \cdot C \cdot \omega / (1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega)$. (d) $\underline{H} = (1 - j \cdot R \cdot C \cdot \omega) / (1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega)$.
3. A basse fréquence, le filtre a un comportement :
(a) intégrateur. (b) suiveur. (c) double intégrateur. (d) dérivateur.
4. A basse fréquence, le diagramme de Bode en gain a pour pente :
(a) 0 dB/dec. (b) +20 dB/dec. (c) -20 dB/dec. (d) -40 dB/dec. (e) autre
5. A haute fréquence, le filtre a un comportement :
(a) intégrateur. (b) suiveur. (c) double intégrateur. (d) dérivateur. (e) autre
6. A haute fréquence, le diagramme de Bode en gain a pour pente :
(a) 0 dB/dec. (b) +20 dB/dec. (c) -20 dB/dec. (d) -40 dB/dec. (e) autre
7. Pour un signal d'entrée u_e sinusoïdal de pulsation ω , le déphasage de u_s par rapport à u_e a pour expression :
(a) $\arctan(R \cdot C \cdot \omega)$. (b) $-\arctan(R \cdot C \cdot \omega)$. (c) $\pi/2 - \arctan(R \cdot C \cdot \omega)$.
(d) $-2 \cdot \arctan(R \cdot C \cdot \omega)$.

8. A basse pulsation, le déphasage de u_s par rapport à u_e tend vers :
 (a) $\pi/2$ radian. (b) $-\pi/2$ radian. (c) 0 radian. (d) $-\pi$ radian.

9. A haute pulsation, le déphasage de u_s par rapport à u_e tend vers :
 (a) $\pi/2$ radian. (b) $-\pi/2$ radian. (c) 0 radian. (d) $-\pi$ radian.

10. A la pulsation $\omega_0 = 1/(R \cdot C)$, le déphasage de u_s par rapport à u_e vaut :
 (a) $\pi/4$ radian. (b) $-\pi/4$ radian. (c) $-\pi/2$ radian. (d) $\pi/2$ radian.

11. Pour un signal d'entrée $u_e(t)$ sinusoïdal de pulsation $\omega_0 = 1/(R \cdot C)$ et d'amplitude 4 V (trait gras) la tension de sortie $u_s(t)$ en pointillés correspond à un des quatre chronogrammes suivants (l'ordonnée est la tension en volt et l'abscisse le temps en ms) :



12. L'équation différentielle reliant u_e et u_s a pour expression :

$$(a) \quad R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s = u_e - R \cdot C \cdot \frac{du_e}{dt}.$$

$$(c) \quad R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s = 2 \cdot u_e.$$

$$(b) \quad R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s = R \cdot C \cdot \frac{du_e}{dt}.$$

$$(d) \quad R \cdot C \cdot \frac{du_s}{dt} + u_s = u_e.$$

13. On applique à l'entrée du filtre un échelon de tension :

$$\begin{cases} \text{pour } t < 0, u_e(t) = 0 \\ \text{pour } t > 0, u_e(t) = E. \end{cases}$$

À $t = 0$ le condensateur est déchargé. Juste après $t = 0$, la tension de sortie est égale à :

$$(a) \quad u_s(0^+) = E.$$

$$(c) \quad u_s(0^+) = 2 \cdot E.$$

$$(b) \quad u_s(0^+) = -E.$$

$$(d) \quad u_s(0^+) = 0.$$

14. Pour la tension d'entrée de la Qu. 13, la tension de sortie a pour expression, pour $t > 0$:

$$(a) \quad u_s(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{RC}}.$$

$$(c) \quad u_s(t) = -2 \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E.$$

$$(b) \quad u_s(t) = 2 \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} - E.$$

$$(d) \quad u_s(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + E.$$

II - Mesure de vitesse par effet Doppler (CCINP PSI 2023)

Les cinémomètres laser sont utilisés pour mesurer la vitesse des cyclistes depuis la route. Ils sont un outil d'analyse des performances instantanées des cyclistes. Leur principe de fonctionnement repose sur le double effet Doppler.

Dans un cinémomètre à effet Doppler, l'émetteur et le récepteur sont tous deux situés au niveau de l'appareil. E (émetteur) et R (récepteur) sont confondus. L'émetteur envoie une onde de fréquence f_E qui se réfléchit sur le cycliste et retourne alors en E . On admettra dans ce cas que $f_R = f_E \left(1 - 2 \frac{v}{c_0}\right)$ où v est la vitesse du cycliste et c_0 la célérité de l'onde.

Validation expérimentale

On se propose ici de valider le fonctionnement du cinémomètre à double effet Doppler dans le cadre du laboratoire de sciences physiques en utilisant des voitures.

Les voiturettes acquièrent une vitesse en descendant d'une piste inclinée de dénivelé h , où elles sont lâchées avec une vitesse initiale nulle, puis roulent sur un support horizontal (figure 6).

Un émetteur envoie une onde sonore de fréquence f_E . Le récepteur reçoit l'onde réfléchie par la voiture, de fréquence $f_R = f_E \left(1 - 2 \frac{v}{c_0}\right)$, mais aussi une onde réfléchie par les obstacles fixes.

L'émetteur et le récepteur sont des transducteurs piézoélectriques de fréquence de résonance égale à 40kHz. Sur notre oscilloscope, deux fréquences ne peuvent être distinguées ("résolues") que si leur écart relatif dépasse 20%.

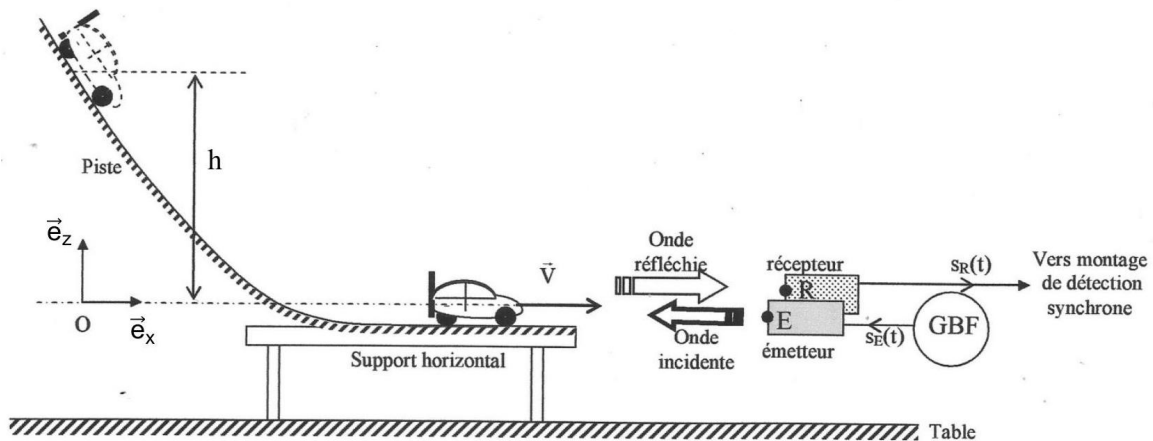


Figure 6 - Maquette du laboratoire

Q1. En négligeant tout frottement, déterminer l'expression de la vitesse de la voiturette une fois arrivée sur la portion horizontale de la piste, en fonction de g et de h . Évaluer cette vitesse avec un chiffre significatif en prenant $h \approx 50\text{cm}$.

Le récepteur reçoit plusieurs signaux réfléchis : celui qui nous intéresse obtenu par réflexion sur la voiture et ceux réfléchis par les obstacles fixes environnants. Pour distinguer tous ces signaux, il faut utiliser une méthode indirecte : la détection synchrone.

Q2. Rappeler l'ordre de grandeur de la célérité des ondes sonores dans l'air à température ambiante. Quelle est la fréquence des ondes réfléchies par les obstacles fixes ? Justifier l'utilisation du montage à détection synchrone.

Le principe du montage à détection synchrone est décrit sur le synoptique suivant (figure 7) :

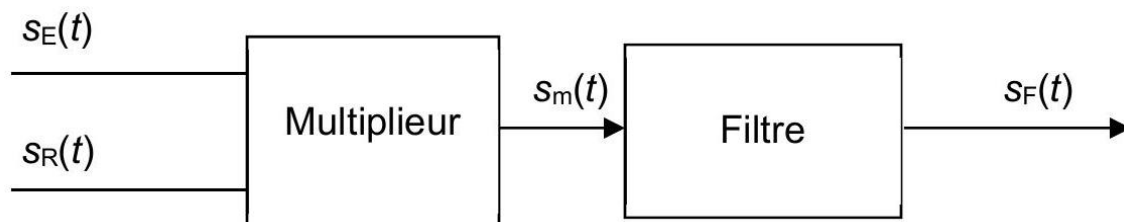


Figure 7 – Détection synchrone

Les tensions électriques $s_E(t)$ et $s_R(t)$ issus du GBF et du récepteur sont envoyées sur un multiplieur de constante $k = 0,1V^{-1}$. On a : $s_m(t) = k \cdot s_E(t)s_R(t)$. La tension $s_m(t)$ est alors filtrée avant d'être envoyée sur l'oscilloscope.

On se propose d'abord d'étudier quelques aspects liés au filtre.

Le montage électronique du filtre est décrit par la figure 8. L'ALI est considéré comme parfait et fonctionne en régime linéaire.

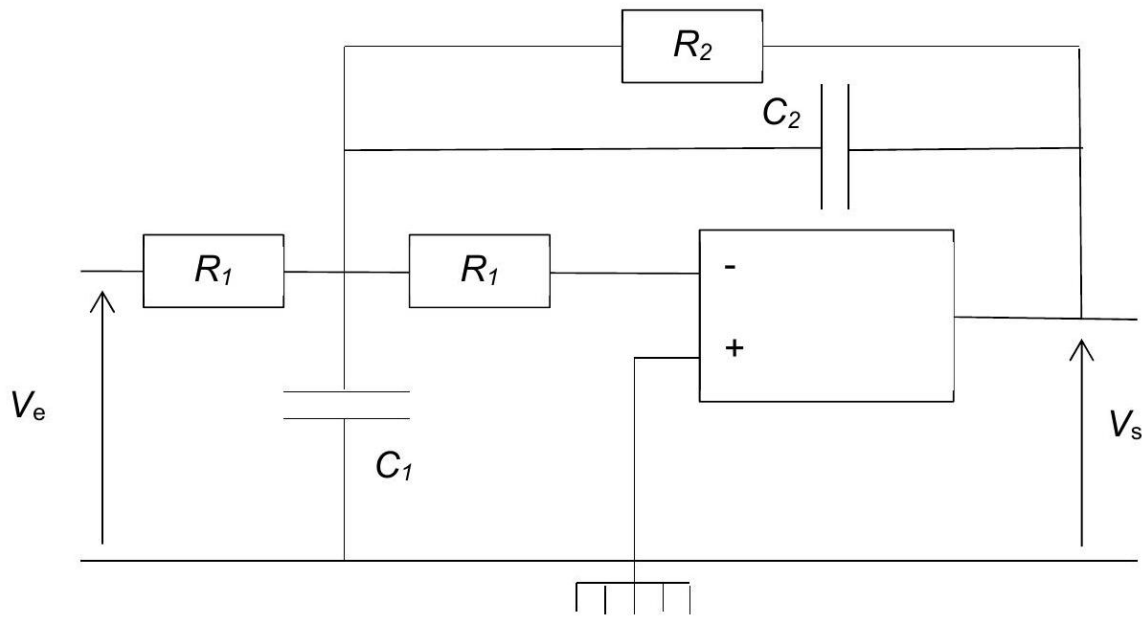


Figure 8 - Filtre

Q3. Déterminer sans calcul la nature du filtre et préciser parmi les deux fonctions de transfert $\underline{H}_1(j\omega)$ et $\underline{H}_2(j\omega)$, laquelle correspond à ce montage :

$$\underline{H}_1(j\omega) = \frac{G_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \text{ et } \underline{H}_2(j\omega) = \frac{-G_0\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Q4. Déterminer le gain G_0 de ce filtre en fonction de R_1 et R_2 .

Q5. Préciser le sens concret de la pulsation ω_0 . Exprimer, sous la forme de deux inégalités fortes faisant intervenir les grandeurs v, c_0 et f_E , les deux contraintes que doivent vérifier la pulsation ω_0 . Proposer en fonction de v, c_0 et de f_E , une expression de ω_0 qui satisfasse le compromis précédent.

Les valeurs choisies pour les composants sont $R_1 = 1k\Omega, C_1 = 3,2nF$ et $C_2 = 1,2nF$ de sorte que ω_0 vérifie la relation précédente avec $m = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Un signal sinusoïdal délivré par un GBF est envoyé en entrée du filtre et est enregistré sur la voie 1 de l'oscilloscope (figure 9).

On enregistre sur la voie 2 de l'oscilloscope le signal issu du filtre.

La base de temps est de 1ms par division comme indiqué en bas de l'écran. Les sensibilités verticales sont de 100mV par division pour la voie 1 et de 5V par division pour la voie 2.

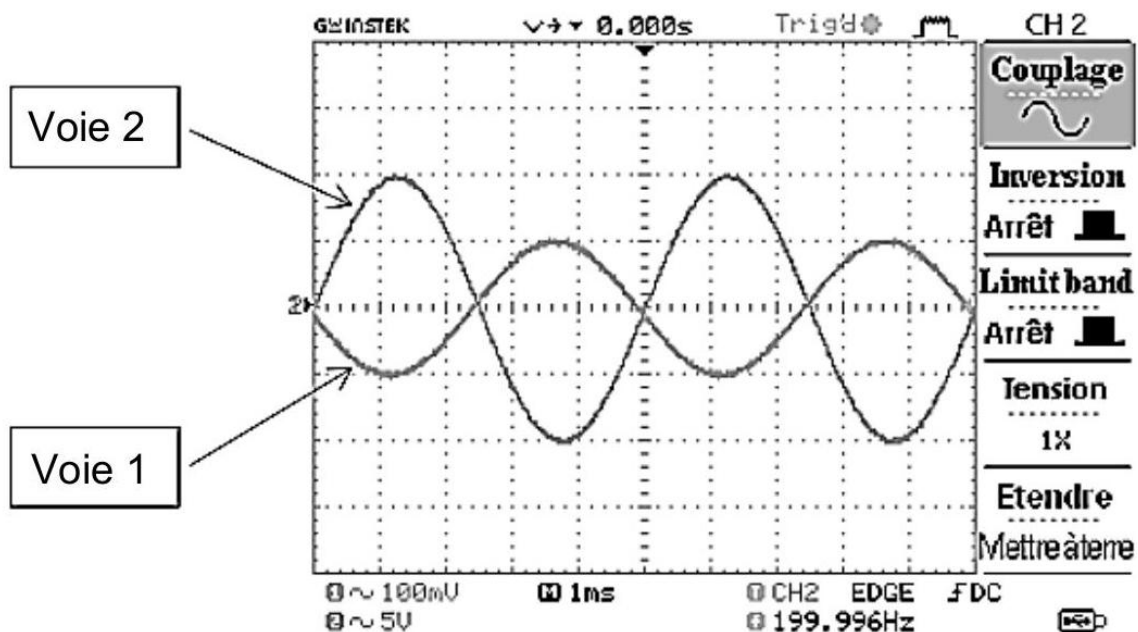


Figure 9 - Oscillogramme 1

Q 6. Qu'est ce qui permet de qualifier cet essai d'essai en basse fréquence ?
Déterminer, à l'aide de l'oscillogramme 1, la valeur numérique de la résistance R_2 .

Q 7. Deux autres essais ont été réalisés en envoyant les tensions sinusoïdales suivantes en entrée du filtre :

- $e_1(t) = E_{01} \cos(\omega_0 t)$;
- $e_2(t) = E_{02} \cos(100\omega_0 t)$

Déterminer les expressions analytiques des tensions $s_1(t)$ et $s_2(t)$ recueillies en sortie du filtre.

On considère maintenant le montage complet lié à la détection synchrone.
Lorsque la tension $s_m(t)$, issue du multiplieur, est envoyée en entrée du filtre, on obtient les oscillogrammes 2 et 3 , représentés sur les figures 10 et 11.

Pour l'oscillogramme 2, la base de temps est de 5ms par division et la sensibilité verticale est de 5V par division, comme indiqué en bas de l'écran.

Pour l'oscillogramme 3, la base de temps est de 1ms par division et la sensibilité verticale est de 5V par division, comme indiqué en bas de l'écran.

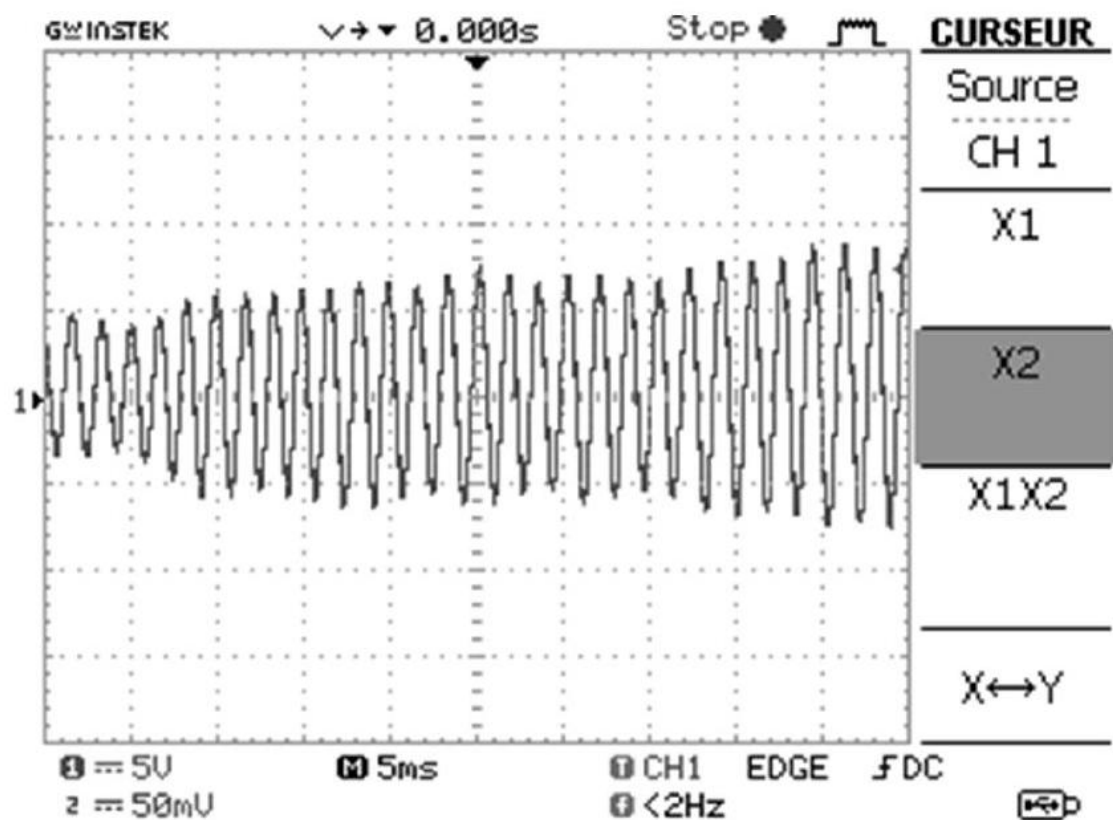


Figure 10 - Oscillogramme 2

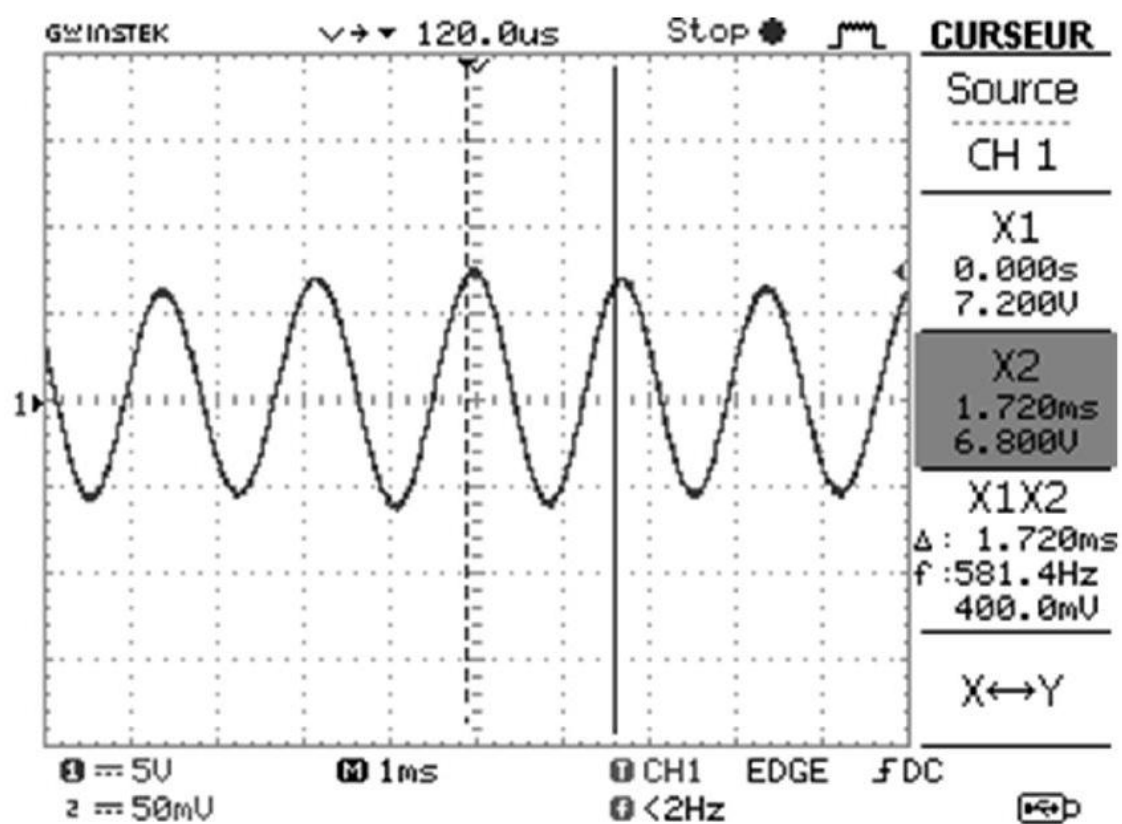


Figure 11 - Oscillogramme 3

Q8. À l'aide des oscillogrammes 2 et 3, évaluer avec un seul chiffre significatif, la vitesse v de la voiturette, lorsqu'elle roule sur le support horizontal.

III Accordeur de guitare (central TSI 19)

Nous allons étudier quelques aspects d'un accordeur de guitare. La problématique est la suivante.

- La guitare comporte six cordes : Mi grave, La, Ré, Sol, Si, Mi aigu.
- Les fréquences fondamentales théoriques de vibration de ces cordes, notées f_{ac} sont données dans le tableau 1.
- On souhaite accorder une corde *légèrement* désaccordée : on notera f_{co} la fréquence fondamentale de vibration de la corde en question.

Principe de l'accordeur

- Sélection de la corde à accorder (donc f_{ac} est fixée).
- Création d'un signal carré de référence de fréquence f_{ac} avec un oscillateur de type astable.

Corde	Fréquence (f_{ac})
Mi grave	82,4 Hz
La	110,0 Hz
Ré	146,8 Hz
Sol	196 Hz
Si	246,9 Hz
Mi aigu	329,6 Hz

Tableau 1 Fréquences fondamentales de vibration des cordes de guitare

- Enregistrement du signal $u_e(t)$ provenant de l'excitation de la corde à accorder : signal quelconque, d'amplitude assez faible, de fréquence f_{co} .
- Amplification et filtrage de ce signal.
- Extraction de la fondamentale du signal : obtention d'un signal sinusoïdal de fréquence f_{co} par l'utilisation d'un filtre à fréquence caractéristique réglable par le signal extérieur de référence.
- Mise en forme de ce signal : obtention d'un signal carré de fréquence f_{co} .
- On a donc à disposition deux signaux carrés (signaux logiques) de fréquences respectives f_{ac} et f_{co} . Dans les accordeurs récents le traitement est numérique : les signaux sont envoyés dans un calculateur numérique intégré qui calcule l'écart de fréquence et indique à l'utilisateur quand la corde est accordée, c'est-à-dire quand $f_{co} = f_{ac}$.

Ce problème s'intéresse au traitement du signal venant de la corde.

A – Le signal

La figure 2 montre un exemple de signal électrique à la sortie du micro d'une guitare électrique.

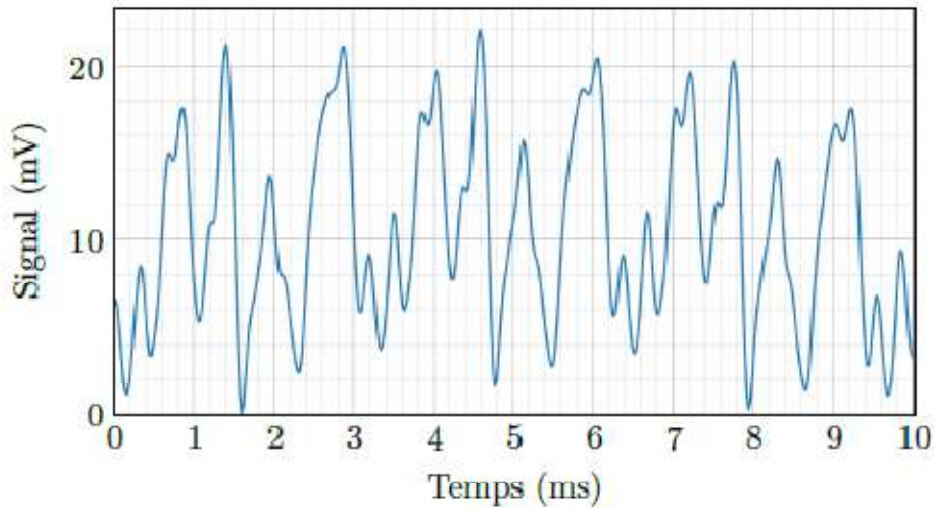


Figure 2 Signal de la guitare

- Q 1. Donner une valeur approchée de la valeur moyenne de ce signal.
- Q 2. Donner une estimation de la valeur de la fréquence de ce signal (on peut supposer qu'en première approximation le signal est périodique).
- Q 3. De quelle corde de guitare s'agit-il ?
- Q 4. L'analyse spectrale de ce signal fera-t-elle apparaître des harmoniques ? Justifier.

B – Premier filtre

Avant toute chose, le signal électrique provenant du micro de la guitare est envoyé sur le filtre de la figure 3 (filtre (F_a)).

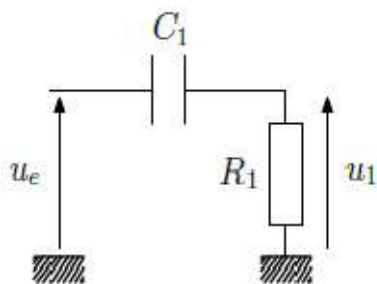


Figure 3 Filtre (F_a)

- Q 5. En supposant l'entrée sinusoïdale, définir et exprimer la fonction de transfert $H_1(j\omega)$ de ce filtre en fonction de R_1 , C_1 et de la pulsation ω du signal.
- Q 6. De quel type de filtre s'agit-il ? Faire apparaître une pulsation caractéristique ω_1 en fonction de R_1 et C_1 et préciser sa signification.
- Q 7. Tracer sans calcul l'allure du diagramme de Bode asymptotique relatif au

gain.

Q 8. On a choisi $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ et $C_1 = 100 \text{ nF}$. Calculer la fréquence de coupure f_1 à -3 dB de ce filtre. Au vu de l'allure du signal de la figure 2, quel est le rôle de ce premier filtre ?

C – Deuxième filtre

Dans cette sous-partie, les signaux sont sinusoïdaux et les amplificateurs linéaires intégrés (ALI) sont supposés idéaux et fonctionnent en régime linéaire.

C.1) Préambule

Soit le filtre de la figure 4(a).

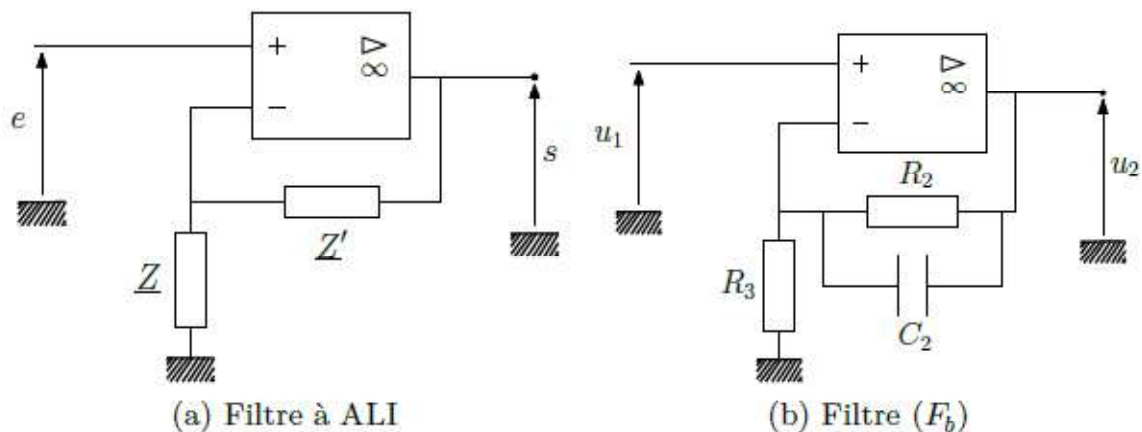


Figure 4 Deux filtres

Q 9. Exprimer sa fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$.

Q 10. Que devient $\underline{H}$ si $\underline{Z}$ et $\underline{Z}'$ sont des résistances ($Z = R$, $Z' = R'$) ? Quel est, dans ce cas, l'intérêt du montage ?

C.2) Amplification (légèrement) sélective

En sortie du filtre de la figure 3 le signal $u_1(t)$ est envoyé sur le filtre de la figure 4(b) (filtre (F_b)).

Q 11. Quelle est l'impédance $\underline{Z}_{eq}$ de la branche constituée par R_2 en parallèle avec C_2 ?

Q 12. Dédurre de la question 9 l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}_2$ de ce filtre en fonction de R_2 , R_3 et C_2 .

Q 13. Mettre $\underline{H}_2$ sous la forme $\underline{H}_2 = 1 + G_0 / (1 + j\omega/\omega_2)$ et donner les expressions de G_0 et ω_2 .

Q 14. Quelle est la limite de $|\underline{H}_2|$ en basse fréquence ? en haute fréquence ?

Q 15. Calculer numériquement la fréquence caractéristique f_2 correspondant à ω_2 si $R_2 = 680 \text{ k}\Omega$, $R_3 = 6 \text{ k}\Omega$ et $C_2 = 470 \text{ pF}$ ainsi que son gain G_0 . Expliquer quel est le rôle de ce second filtre.

D – Filtrage (très) sélectif commandé

On souhaite maintenant sélectionner la fréquence fondamentale f_{co} du signal u_2 , dont la valeur est à priori voisine de celle de la fréquence fondamentale théorique de vibration de la corde sélectionnée sur l'accordeur (f_{ac}) (on suppose que la corde est légèrement désaccordée). On suppose pour la suite que c'est la corde Mi aigüe que l'on souhaite accorder.

Le principe du filtre (F_c) est que sa fréquence caractéristique soit réglée par le signal de référence de fréquence f_{ac} .

D.1) Diagramme de Bode

La figure 5 représente le diagramme de Bode relatif au gain du filtre (F_c) tracé à deux échelles différentes.

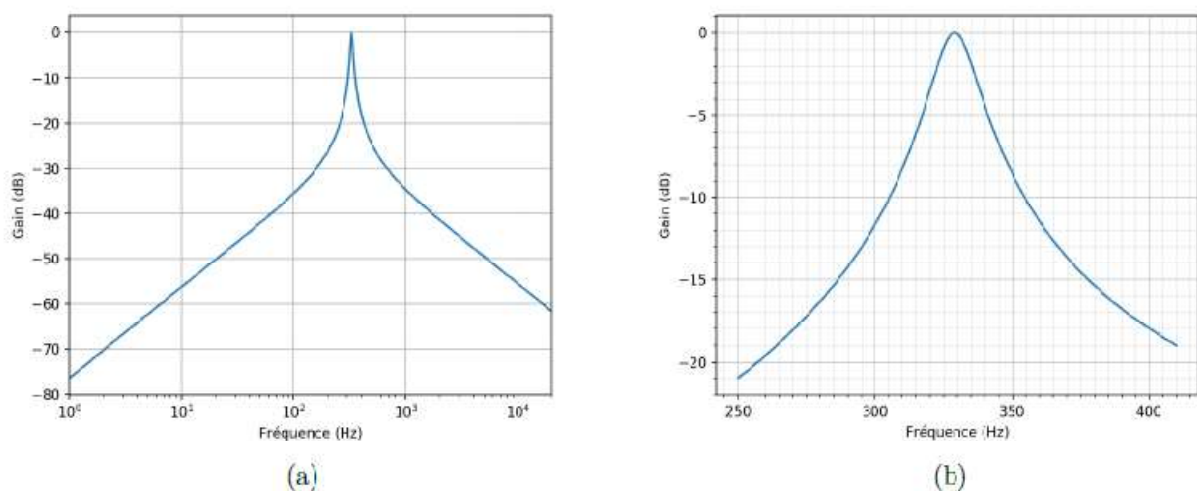


Figure 5 Diagramme de Bode en gain du filtre (F_c)

Q 16. Dire en le justifiant rapidement, de quel type de filtre il s'agit. Quelle est sa fréquence centrale caractéristique ?

Q 17. Donner une estimation de sa bande-passante à -3 dB après l'avoir définie.

Q 18. Si la corde est désaccordée à $f_{co} = 315$ Hz, estimer, en le justifiant, de quel facteur est atténuée sa composante spectrale fondamentale en sortie de ce filtre.

D.2) Analyse spectrale

La figure 6 correspond au spectre du signal d'entrée u_e représenté sur la figure 2.

Q 19. Justifier qu'il est parfaitement cohérent qu'il s'agisse du spectre du signal de la figure 2.

Q 20. En le justifiant soigneusement, dire quel spectre de la figure 7 correspond à la sortie du premier filtre (F_a).

Q 21. Même question, pour la sortie du filtre (F_b).

Q 22. Tracer l'allure du spectre du signal en sortie du filtre (F_c). Tracer l'allure du signal (temporel) correspondant.

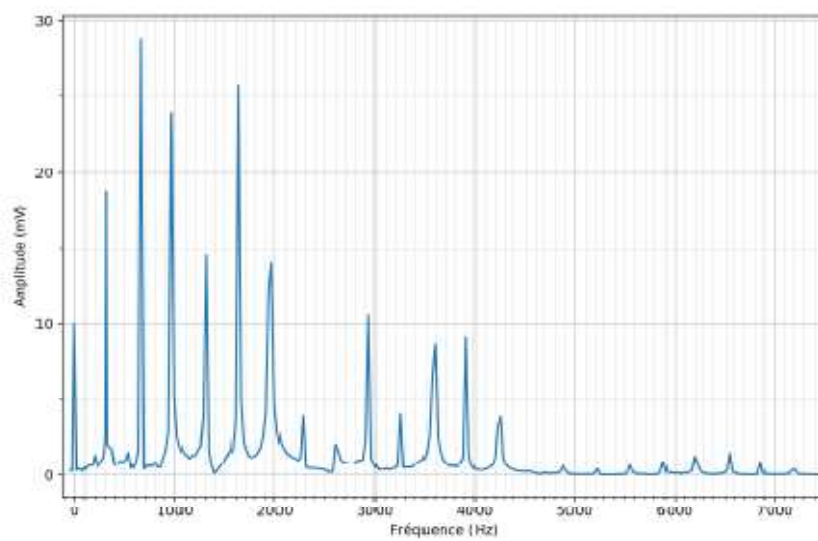
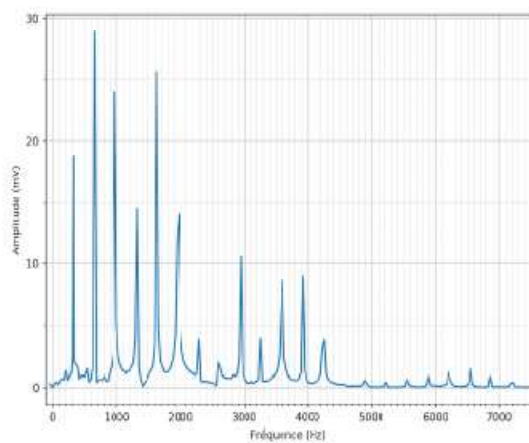
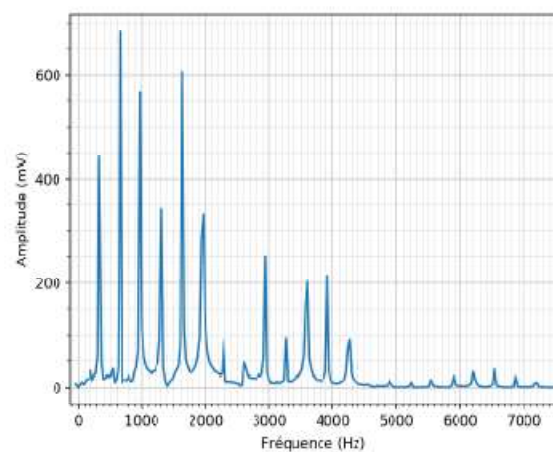


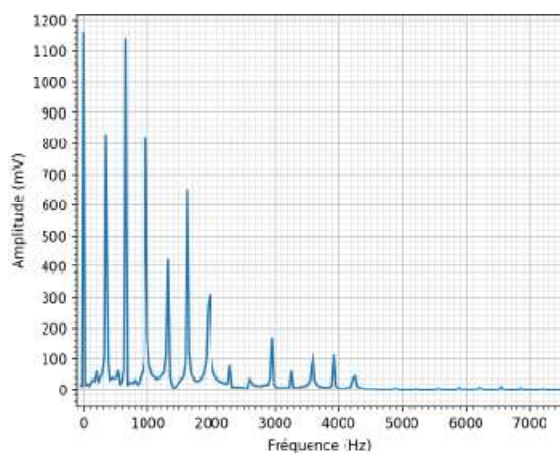
Figure 6 Spectre du signal d'entrée



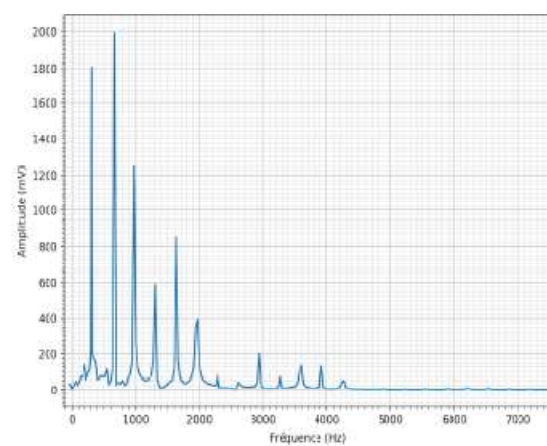
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 7 Spectres

IV Conditionnement du signal (mines ponts PSI 22)

Un capteur LVDT est associé à un conditionneur de signal qui délivre une tension continue proportionnelle à la position du noyau magnétique. Cette partie étudie le fonctionnement du conditionneur AD598 dont le schéma fonctionnel fourni par la notice est représenté en figure 7.

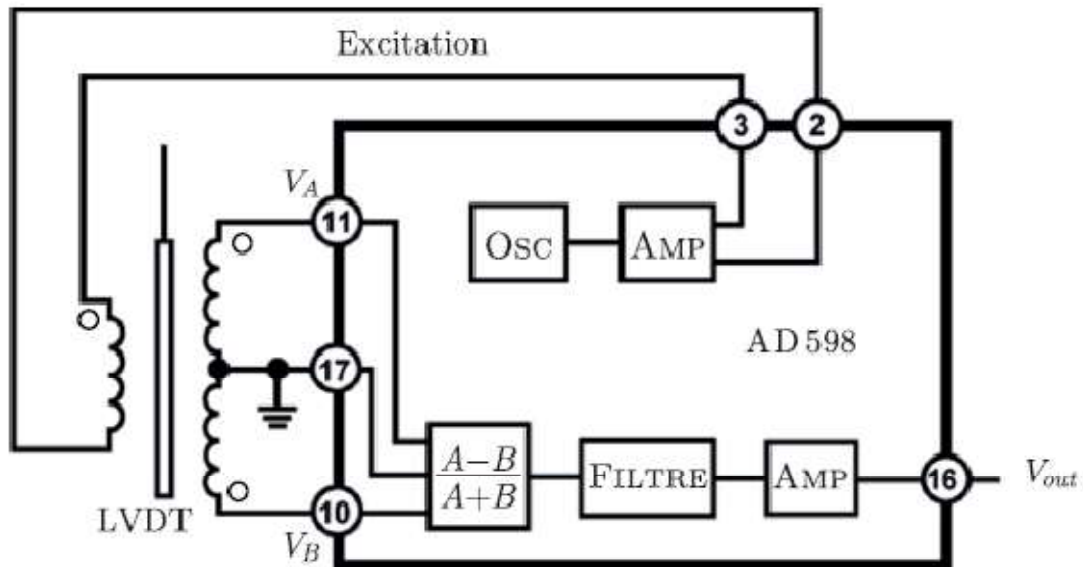


FIGURE 7 – Diagramme bloc fonctionnel du conditionneur AD598

L'AD598 comporte un oscillateur local, noté Osc en figure 7, générant une tension sinusoïdale dont la fréquence peut varier de 20 Hz à 20 kHz, suivi d'un amplificateur de tension qui délivre la tension u_p appliquée aux bornes du circuit primaire du LVDT.

L'oscillateur local produit dans un premier temps une tension périodique fonction triangulaire du temps qui est ensuite transformée en une tension sinusoïdale du temps grâce à un montage conformateur à diodes.

L'étude se focalise sur l'alimentation du circuit primaire.

Le bloc Osc de la figure 7 est constitué d'un générateur de tension en triangle suivi d'un convertisseur triangle-sinus à diodes. Le circuit générateur de tension en triangle est représenté en figure 8.

Les trois Amplificateurs Linéaires Intégrés (ALI) sont idéaux et nommés (A_1), (A_2) et (A_3) (voir figure 8). On notera $+V_{sat}$ et $-V_{sat}$ les tensions de saturation haute et basse des ALI.

Q – 18. Après avoir rappelé la définition d'un ALI idéal, indiquer quels sont ceux qui fonctionnent en régime linéaire. On justifiera simplement la réponse. Les tensions $v_e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_s(t)$ sont des fonctions non sinusoïdales du temps.

Q – 19. Établir la relation entre $v_e(t)$ et $v_1(t)$ puis celle entre $v_1(t)$ et $v_2(t)$.

Q – 20. Déterminer la valeur de v_s selon les valeurs et le sens de variation de v_2 , puis représenter graphiquement ces variations en reportant v_s en ordonnée et v_2 en abscisse. On fera apparaître les valeurs remarquables sur chaque axe du graphique.

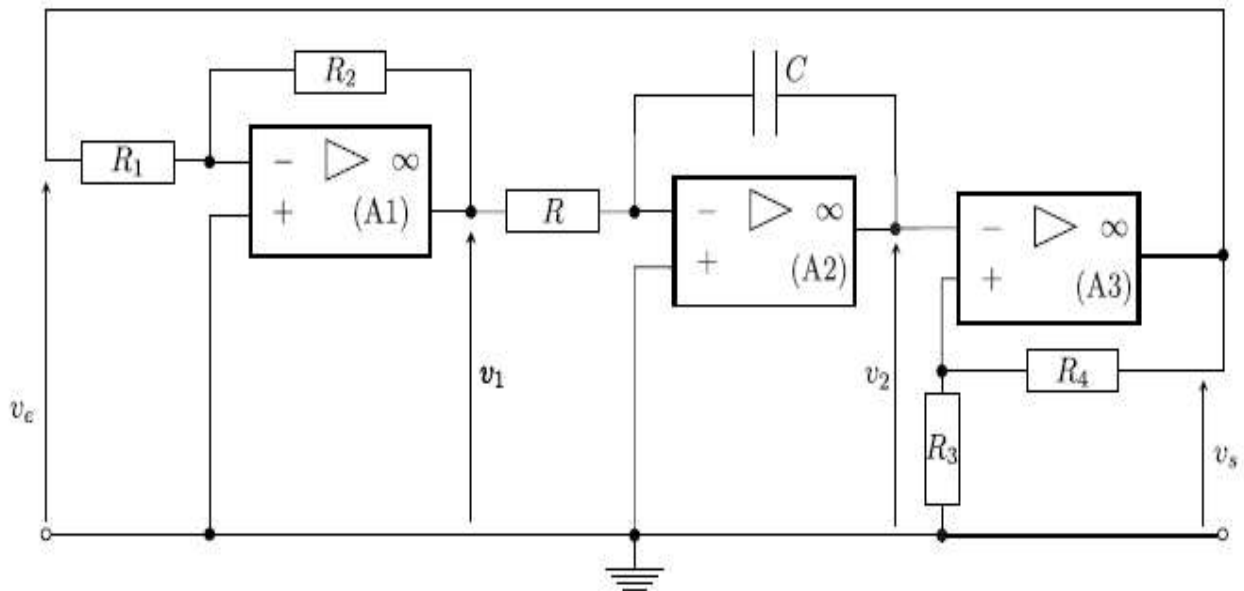


FIGURE 8 – Générateur de triangle.

Q – 21. En tenant compte des trois résultats précédents, déterminer les variations de v_2 et v_s en fonction du temps. Représenter ces variations sur un même graphe.

Laquelle des tensions $v_e(t)$, $v_1(t)$, $v_2(t)$ et $v_s(t)$ est une fonction triangulaire périodique du temps ? On nomme $v_t(t)$ cette tension. Calculer sa période T en fonction de R , C , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 .

Q – 22. En fixant $R = 1 \text{ k}\Omega$ et en prenant $R_1 = R_2$ puis, uniquement pour cette application numérique $R_3 = R_4$, déterminer la valeur de C permettant d'obtenir une tension $v_t(t)$ de fréquence 2 kHz .

Comment faire pour permettre à un utilisateur de l'AD598 de modifier à volonté cette fréquence ?

Exprimer l'amplitude E de la tension $v_t(t)$ en fonction des données du circuit de la figure 8. Sur quels paramètres de ce circuit faut-il agir afin de modifier cette amplitude ?

Déterminer la condition sur ces paramètres pour que $E/V_{\text{sat}} = 0,22$. Calculer dans ce cas la valeur de E en prenant $V_{\text{sat}} = 15 \text{ V}$.

L'origine des temps étant arbitrairement fixée, la figure 9 contient, d'une part, les variations de la tension triangulaire réduite v_t/E en fonction du temps réduit

$\theta = t/T$ et, d'autre part, celles de la tension sinusoïdale réduite v_0/E en fonction de θ que l'on souhaite obtenir après la conversion triangle-sinus.

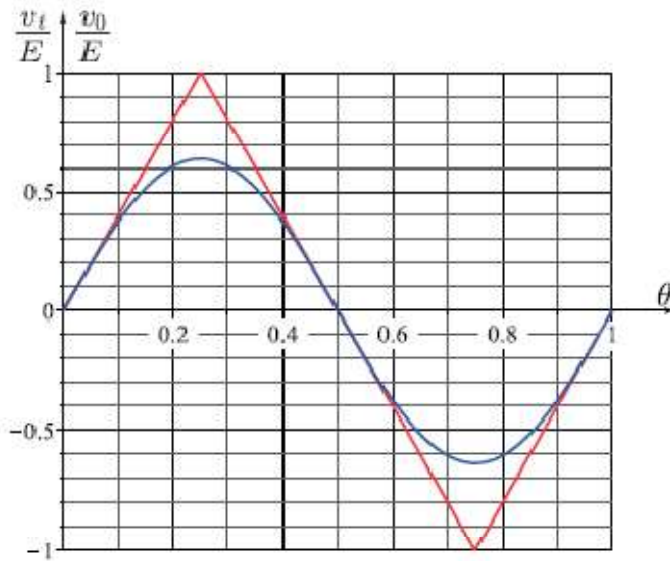


FIGURE 9 – Conversion triangle - sinus.

Afin de réaliser cette conversion, on utilise un montage convertisseur à diodes représenté en figure 10. Les diodes sont toutes identiques. En notant i_d leur courant direct et u_d la tension en convention récepteur (figure 10), le fonctionnement de chaque diode est tel que si $i_d > 0$ alors $u_d = U_s > 0$ et si $i_d = 0$ alors $u_d < U_s$.

Pour toute la suite, on prendra une tension de seuil égale à $U_s = 0,7 \text{ V}$.

Le montage convertisseur, alimenté par la tension v_t , est dimensionné pour délivrer une tension v_s se rapprochant au mieux de la tension v_0 représentée en figure 9. Le dimensionnement consiste, entre autres, à choisir correctement les résistances r_1 et r_2 , lorsque $r_0 = 1,0 \text{ k}\Omega$. Ce choix sera effectué pour une valeur du courant de sortie $i_s = 0$.

Q – 23. Pour $0 \leq \theta = t/T \leq 1/4$, donner l'expression de v_t en fonction de θ et de E .

On considère l'association des deux diodes dans la cellule en traits pointillés (1).

Q – 24. Montrer que les deux diodes ne peuvent conduire le courant simultanément. Montrer qu'il existe une valeur $U_1 > 0$ telle que si $0 \leq v_s \leq U_1$ alors le courant dans la résistance r_1 est nul et, si $v_s > U_1$, ce courant n'est pas nul. Exprimer U_1 en fonction de U_s .

On considère l'association des quatre diodes dans la cellule en traits pointillés (2).

Q – 25. Montrer qu'il existe une valeur $U_2 > 0$ telle que si $0 \leq v_s \leq U_2$ alors le courant dans la résistance r_2 est nul et si $v_s > U_2$ ce courant n'est pas nul.

Exprimer U_2 en fonction de U_s .

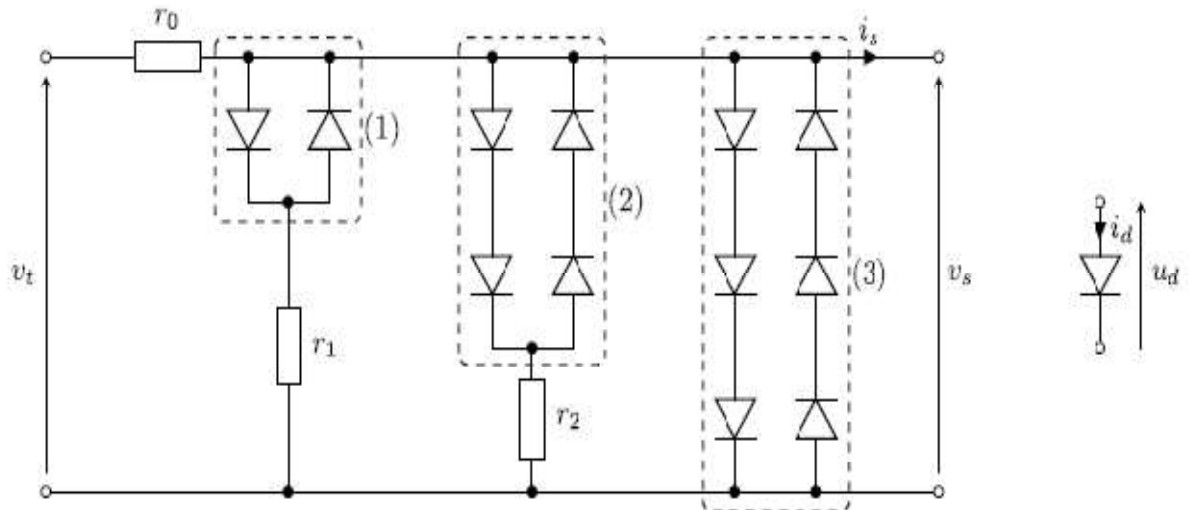


FIGURE 10 – Montage convertisseur.

On considère finalement le bloc de la cellule en traits pointillés (3).

Q – 26. Montrer que la valeur positive maximale de v_s , notée $V_{\max}$, vaut $3 U_s$.

On note désormais $s(\theta) = V_{\max} \sin(2\pi\theta)$ la tension sinusoïdale idéale que l'on souhaite obtenir en sortie du montage de la figure 10, de même période que v_t .

Q – 27. Déterminer la relation à imposer entre U_s et E afin que les deux pentes en $\theta = 0$ des courbes $v_t(\theta)$ et $s(\theta)$ en fonction de θ soient identiques. On vérifiera que cette condition revient à identifier le rapport E/U_s à une fraction de π et on supposera cette relation vérifiée par la suite.

Q – 28. Pour $v_s < U_1$, quelle est l'expression de v_s en fonction de v_t puis celle en fonction de θ ?

En déduire la valeur θ_1 de θ telle que $v_s(\theta_1) = U_1$. On simplifiera cette valeur en utilisant la condition déduite à la question précédente.

Q – 29. On suppose pour cette question $U_1 < v_s < U_2$.

Exprimer v_s en fonction de v_t , U_s , r_1 et r_0 puis en fonction de U_s , r_1 , r_0 , E et θ .

Quelle doit être la valeur du rapport $\rho_1 = r_0/r_1$ afin que les pentes des courbes $v_s(\theta)$ et $s(\theta)$ soient identiques lorsque $\theta \rightarrow \theta_1$ par valeurs supérieures ? On exprimera ρ_1 uniquement en fonction du cosinus de $1/3$.

Cette condition étant vérifiée, exprimer v_s en fonction de U_s , ρ_1 , E et θ puis déduire l'expression de θ_2 défini par $v_s(\theta_2) = U_2$ que l'on mettra sous la forme $\theta_2 = \alpha\theta_1$ et dans laquelle on exprimera la constante α uniquement en fonction du cosinus de $1/3$.