Chapitre 3 - Séries numériques

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

I – Rappels de première année sur les suites numériques

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les termes appartiennent à $\mathbb{K}$.

1) Quelques suites de référence

a. Suites arithmétiques

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** s'il existe $r \in \mathbb{K}$ (la raison) tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = u_n + r.}$$

Pour montrer qu'une suite est arithmétique, on calcule $u_{n+1} - u_n$ et on montre que cette quantité est constante (égale à r).

- On peut alors donner le terme général u_n en fonction de n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 + nr.}$$

Si le premier terme de la suite est u_{n_0} où n_0 est un entier naturel, on peut écrire

$$\forall n \geq n_0,\ \ u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r.$$

- Une telle suite diverge sauf si $r = 0$ (suite constante).
- La somme de termes consécutifs de la suite est obtenue par la formule suivante :

$$\sum_{k=n_0}^{k=n} u_k = \frac{(n - n_0 + 1)(u_n + u_{n_0})}{2},$$

en particulier

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \frac{(n+1)(u_n + u_0)}{2},$$

formule qu'on peut retenir ainsi :

$\boxed{\text{"nombre de termes"} \ \times\ \text{"(premier terme+dernier terme)" divisé par 2.}}$

- En particulier, on retiendra la somme des entiers consécutifs :

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

b. Suites géométriques

- On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe $q \in \mathbb{K}$ (la raison) tel que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = q u_n.}$$

- On peut alors donner le terme général u_n en fonction de n :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = u_0 q^n.}$$

Si le premier terme de la suite est u_{n_0} où n_0 est un entier naturel, on peut écrire

$$\forall n \geq n_0,\ \ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

- Supposons $u_0 \neq 0$.
  - — Si $|q| < 1$, alors u converge vers 0 ;
  - — si $|q| = 1$, alors u est constante si $q = 1$ et u est bornée et diverge si $q \neq 1$;
  - — si $|q| > 1$, alors u diverge et est non bornée.
- La somme de termes consécutifs de la suite est obtenue par la formule suivante :
si $\boxed{q \neq 1}$,

$$\sum_{k=n_0}^{k=n} u_k = u_{n_0} \frac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q},$$

en particulier

$$\sum_{k=0}^{k=n} u_k = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q},$$

formule qu'on peut retenir ainsi :

$$\boxed{\text{"premier terme"} \ \times\ \text{"}\left(1-q^{\text{nombre de termes}}\right)\text{" divisé par } (1-q).}$$

Si $q = 1$, la suite est constante et la somme des termes est la valeur des termes que multiplie le nombre de termes :

$$\sum_{k=n_0}^{k=n} u_k = u_{n_0} \times (n - n_0 + 1).$$

c. Suites arithmético-géométriques

- On dit que $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe a et b dans $\mathbb{K}$ tels que

$$\boxed{(\star)\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} = a u_n + b.}$$

Si $b = 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a. Si $a = 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b. On supposera donc $\boxed{a \neq 1 \text{ et } b \neq 0}$.

- Pour étudier une telle suite (terme général, convergence,...), on cherche une solution particulière constante de $(\star)$ puis on ajoute les solutions de l'équation homogène ($\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = a u_n$) :
  - — On trouve $\gamma \in \mathbb{C}$ tel que $\gamma = a\gamma + b$. On obtient une et une seule solution $\boxed{\gamma = \dfrac{b}{1-a}}$ (solution particulière).
  - — Les suites vérifiant $u_{n+1} = a u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ sont les suites géométriques de raison a (solutions de l'équation homogène) donc l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est $\{(\lambda a^n + \gamma)_{n\in\mathbb{N}},\ \lambda \in \mathbb{K}\}$.
  Si on connait u_0, on en déduit : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n = (u_0 - \gamma) a^n + \gamma}$.

2) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Théorème I.1. *On dit que $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **une suite récurrente linéaire d'ordre** 2 *s'il existe a dans $\mathbb{K}$ et b dans $\mathbb{K}^*$ tels que que :*

$$(\star)\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n.$$

On écrit l'équation caractéristique associée :

$$r^2=ar+b.$$

(1) $\boxed{\textit{On suppose que } \mathbb{K}=\mathbb{C}}$.
- ($\Delta\neq 0$) *Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes r_1 et r_2, alors l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est*

$$\left\{\left(\alpha r_1^n+\beta r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

- ($\Delta=0$) *Si l'équation caractéristique a une solution double r_0, alors l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est*

$$\left\{\left((\alpha+\beta n)r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2\right\}.$$

(2) $\boxed{\textit{On suppose que } \mathbb{K}=\mathbb{R}}$.
- ($\Delta>0$) *Si l'équation caractéristique a deux solutions distinctes réelles r_1 et r_2, alors l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est*

$$\left\{\left(\alpha r_1^n+\beta r_2^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

- ($\Delta=0$) *Si l'équation caractéristique a une solution double r_0, alors l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est*

$$\left\{\left((\alpha+\beta n)r_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

- ($\Delta<0$) *Si l'équation caractéristique a deux solutions complexes non réelles conjuguées $z=\rho\,\mathrm{e}^{i\theta}$ (avec $\rho\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$) et $\overline{z}=\rho\,\mathrm{e}^{-i\theta}$, alors l'ensemble des suites vérifiant $(\star)$ est*

$$\left\{\left(\rho^n\left(\alpha\cos(n\theta)+\beta\sin(n\theta)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\right\}$$

ou, sous une autre forme : $\left\{\left(A\rho^n\cos(n\theta+\varphi)\right)_{n\in\mathbb{N}},\ (A,\varphi)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

Méthode.
- En général, on obtient la valeur de α et β grâce aux premiers termes de la suite (souvent u_0 et u_1).
- Parfois, on cherche les suites u vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre deux de la forme

$$(\star)\ \ \forall n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+2}=au_{n+1}+bu_n+w_n$$

où w est une suite *second membre*. Pour résoudre une telle équation, on utilise le théorème pour résoudre l'équation sans second membre puis on ajoute une solution particulière de $(\star)$. Aucune méthode n'est proposée pour cela, on pourra chercher une solution *de la même forme* que w...

Exemple I.2.2. (1) Déterminer le terme général de la suite de Fibonacci définie par :

$$u_0=0,\ u_1=1 \text{ et : } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

(2) Déterminer le terme général de la suite définie par :

$$u_0=0,\ u_1=1 \text{ et : } \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\sqrt{3}u_{n+1}-u_n.$$

3) Suites récurrentes d'ordre 1

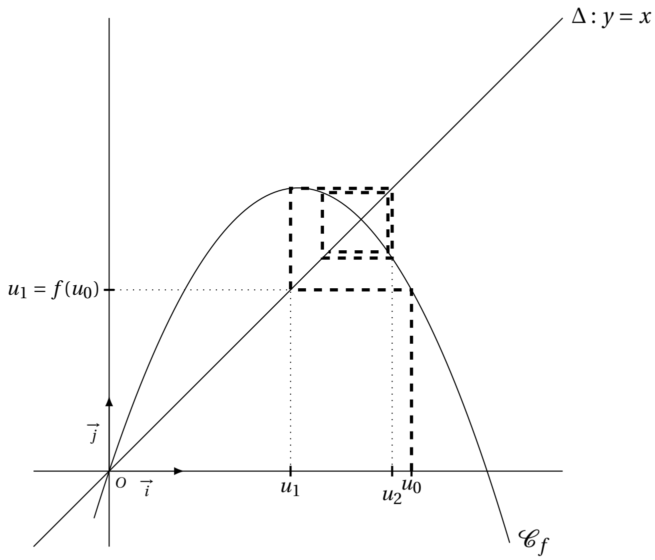
Soit f une fonction réelle. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite récurrente d'ordre 1, c'est-à-dire une suite définie par la donnée de u_0 et par la relation de récurrence :

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=f(u_n)}.$$

Méthode. ✌ Si l'exercice ne comporte pas d'indication, on pourra suivre les idées suivantes :

(1) Identifier la *fonction itératrice* f, l'étudier (variations, points fixes, ...) et tracer l'allure de son graphe ainsi que celui de la droite d'équation $y=x$.

(2) En observant ce graphe et la valeur de u_0, on cherche un intervalle I qui contient tous les termes de la suite, au moins à partir d'un certain rang.
Cette propriété se démontre par récurrence (immédiate si on a le tableau de variations de f et un intervalle stable par f qui contient u_0).
On peut souvent déjà dire que u est minorée et/ou majorée et émettre des conjectures sur la suite u.



(3) On étudie l'évenutelle monotonie de u.

(a) En cherchant le signe de $u_{n+1}-u_n$, c'est-à-dire de $f(u_n)-u_n$. Il suffit d'étudier le signe de la fonction $\varphi : x\mapsto f(x)-x$ sur I.
Le signe de φ "se lit" sur le graphique construit dans la partie précédente.
En effet, φ est positive si $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de Δ et négative si $\mathscr{C}_f$ est en dessous de Δ.
Les points où φ s'annule sont les points fixes de f, ils joueront un rôle crucial dans l'étude de u.

(b) Si la fonction f est croissante sur I alors u est monotone et il ne reste qu'à comparer u_1 et u_0 pour connaître le sens de la monotonie.

(c) Si la fonction f est décroissante sur I, ce sont les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ qui sont monotones de sens de variation opposés.

(4) En utilisant le théorème de la limite monotone et les points fixes de f, on montre la convergence ou la divergence de u.
En cas de convergence, c'est la continuité de f qui permet de *passer à la limite* dans l'expression $u_{n+1}=f(u_n)$ (pour obtenir $\ell=f(\ell)$).

Exemple I.3.3. Étudier la convergence des suites récurrentes définies par les relations suivantes :

(1) $u_0=2$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}$.

(2) $u_0\in\mathbb{R}$ et : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=\arctan(u_n)$.

4) Sommes de Riemann

Proposition I.4.4. *Soit a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue sur le segment $[a;b]$. On note*

$$S_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \quad \text{et} \quad R_n(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right).$$

On appelle ces sommes méthodes des rectangles à gauche et à droite.
Les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(R_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent vers $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Méthode. ✌ Dans la pratique, on reconnaît une telle somme de Riemann à la présence des termes $\dfrac{k}{n}$ dans la somme. Pour utiliser le résultat précédent, on choisira $a = 0$ et $b = 1$, de sorte que

$$S_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \text{et} \quad R_n(f) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Exercice I.4.5. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ dans chacun des cas suivants :

(1) $\forall n \geq 2,\ u_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \frac{1}{n}\left[\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{n\pi}{n}\right)\right]$,

(2) $\forall n \geq 2,\ u_n = n\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = n\left[\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2}\right]$.

5) Opérations sur les limites

On ne rappelle pas ici les différents résultats sur les opérations sur les limites (finies ou infinies) : limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient. Ces résultats sont les premiers à utiliser pour calculer l'éventuelle limite d'une suite.
Parfois, ces résultats donnent lieu à une *forme indéterminée* et ne permettent pas de conclure. On utilise alors souvent les *croissances comparées* ou *limites de référence* suivantes : si $a > 0$, $b > 0$ et $c > 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^a(n)}{n^b} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^b}{\exp(cn)} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^a(n)}{\exp(cn)} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} n^a q^n = 0 \text{ si } |q| < 1.$$

On utilisera avantageusement les notations suivantes :

$$\ln^a(n) = o\left(n^b\right), \quad n^b = o\left(\mathrm{e}^{cn}\right), \quad \ln^a(n) = o\left(\mathrm{e}^{cn}\right), \quad a^n = o(n!), \quad n^a = o\left(q^n\right) \text{ si } |q| > 1.$$

6) Convergence et inégalités

Théorème I.6 (des gendarmes ou de la limite encadrée). *Soient v et w deux suites qui convergent vers la même limite ℓ.*
Soit u une suite telle que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.
Alors, u converge et $\lim u = \ell$.

Théorème I.7 (de la limite monotone). *(1) Soit u une suite croissante. La suite u est convergente si et seulement si elle est majorée.*

- *Si u est majorée, alors u converge vers $\ell = \sup\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (en particulier $u_n \leq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).*
- *Si u n'est pas majorée, alors* $\lim u = +\infty$.

(2) Soit u une suite décroissante. La suite u est convergente si et seulement si elle est minorée.

- *Si u est minorée, alors u converge vers $\ell = \inf\{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (en particulier $u_n \geq \ell$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).*
- *Si u n'est pas minorée, alors* $\lim u = -\infty$.

Définition I.6.8. Soient u et v deux suites réelles. On dit que les suites u et v sont adjacentes si :

- l'une est croissante ;
- l'autre est décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ (ou $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$ ou $\lim_{n\to+\infty}|u_n - v_n| = 0$).

Théorème I.9. *Soient u et v deux suites adjacentes. On suppose que u est croissante et v est décroissante. Alors u et v convergent vers une limite commune ℓ et : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq \ell \leq v_n$.*

II – Rappels de première année sur les séries numériques

1) Vocabulaire - Propriétés

Définition II.1.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ (*tout se généralise à une suite définie sur* $[\![n_0;+\infty]\!]$ *seulement*). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

- On appelle série (numérique) de terme général u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qu'on note usuellement $\sum u_n$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série $\sum u_n$.
- Si la suite (des sommes partielles) $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge , on dit que la série converge et la limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée somme de la série $\sum u_n$ et est notée
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$
On dit alors que la série est convergente.
- Si la série est convergente et que sa somme est notée S, on appelle reste d'ordre n la quantité $R_n = S - S_n$. On note alors $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. On a alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.
- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, on dit que la série $\sum u_n$ est divergente.
La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut tendre vers $+\infty$, vers $-\infty$ ou ne pas avoir de limite du tout.
- Déterminer la nature d'une série consiste à déterminer si la série est convergente ou divergente.

Remarque.

- On ne confondra pas la **suite** de terme général u_n notée u ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
avec la **série** de terme général u_n qui est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles et qui est notée $\sum u_n$ ou $\sum_{n\geq 0} u_n$.
- On rédigera la conclusion de la convergence d'une série ainsi :
$$\textit{La série } \sum u_n \textit{ converge et sa somme est } \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ldots.$$
Dans cette phrase, on ne confondra pas $\sum u_n$ qui est une série (une suite donc !) et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qui est un nombre (une limite !)

Proposition II.1.2 (Condition nécessaire de convergence)**. Si** *la série* $\sum u_n$ *converge,* **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Si u_n ne converge pas vers 0*, on dira que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

Remarque. Le fait que le terme général converge vers 0 n'est pas une condition suffisante pour que la série converge. Par exemple, on sait que la série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Proposition II.1.3. *(1) Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes et si $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$, alors $\sum(\lambda u_n+\mu v_n)$ est une série convergente et*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n+\mu v_n)=\lambda\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)+\mu\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right).$$

(2) Si $\sum u_n$ est une série à termes complexes, alors la convergence de $\sum u_n$ est équivalente aux convergences de $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$. On a alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(u_n)+i\sum_{n=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(u_n)$.

(3) Si $\sum u_n$ est une série divergente, alors, pour tout $\lambda\in\mathbb{C}^*$, $\sum\lambda u_n$ est divergente.

(4) Si $\sum u_n$ est une série convergente et si $\sum v_n$ est une série divergente, alors $\sum(u_n+v_n)$ est une série divergente.
En général la somme de séries convergentes et **d'une seule** *série divergente est une série divergente.*
⚠ *On ne peut rien dire sur la somme de deux séries divergentes!*

(5) On ne modifie pas la nature d'une série en changeant un nombre fini de termes (mais en cas de convergence, la somme est en général modifiée!)

Proposition II.1.4 (Lien suite/série)**.** *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique.*
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de même nature que la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

2) Séries de réference

a. Séries géométriques

Définition II.2.5. Soit $a\in\mathbb{K}$. On appelle série géométrique de raison a toute série de la forme $\sum u_0a^n$ où $u_0\in\mathbb{K}^*$.

Proposition II.2.6. *Une série géométrique de raison $a\in\mathbb{K}$ est convergente si et seulement si $|a|<1$.*
Si $|a|<1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}a^n=\frac{u_0}{1-a}$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\displaystyle R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}a^k=u_0\frac{a^{n+1}}{1-a}$.

Exemple II.2.7. Pour tout $c\in]0;+\infty[$, la série $\sum \mathrm{e}^{-cn}$ est convergente.

Cette série, bien que très classique, ne fait pas partie des séries de référence dans le programme officiel. On remarquera donc qu'il s'agit d'une série géométrique de raison $\mathrm{e}^{-c}\in]0;1[$ pour justifier la convergence.

b. Série exponentielle

On rappelle d'abord l'inégalité de Taylor-Lagrange :

Théorème II.8 (Inégalité de Taylor-Lagrange)**.**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I.
Soit $x \in I$. La fonction $\left|f^{(n+1)}\right|$ admet un maximum sur $[a; x]$ (ou $[x; a]$), que l'on note M. On a alors

$$\left| f(x) - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \right) \right| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Dans cette majoration, on peut remplacer M par n'importe quel majorant de $|f^{(n+1)}|$ sur $[a; x]$.

Proposition II.2.9. *Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

En particulier : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = \mathrm{e}$.
On rappelle que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$: $\mathrm{e}^{a+ib} = \mathrm{e}^a \times (\cos(b) + i\sin(b))$ où e^a est l'exponentielle réelle de a.

Remarque. On déduit de la convergence de la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{z^n}{n!} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
Cette *croissance comparée* n'étant pas explicitement dans le programme, vous pouvez la justifier ainsi si on vous le demande.

Exemple II.2.10. En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ en $a = 0$ pour $x = 1$, démontrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$. Cette série est appelée *série harmonique alternée*.

c. Séries de Riemann

Définition II.2.11. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée série de Riemann.

Proposition II.2.12. *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.*

Exemple II.2.13.
- La série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge et on peut démontrer (mais ce n'est pas simple !) que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.
- La série $\sum \frac{1}{n^4}$ converge et on peut démontrer (mais ce n'est pas simple !) que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

Proposition II.2.14 (Cas particulier)**.** *La série (dite harmonique) $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente.*
De plus la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\geq 1}$ vérifie $S_n \sim \ln(n)$.

Ce dernier équivalent n'est pas explicitement dans le programme mais il doit être connu, quitte à le redémontrer.

Hors-programme : il existe un réel γ appelé constante d'Euler ($\gamma \approx 0.577$) tel que $S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

3) Théorèmes de comparaison - Convergence absolue

a. Théorèmes de comparaison

On peut rarement calculer explicitement les sommes partielles S_n. Pour déterminer la nature d'une série, il est beaucoup plus fréquent de comparer son terme général à celui d'une série de référence dont on connaît déjà la nature. C'est l'objet des théorèmes qui suivent. En aucun cas ils ne permettent de calculer l'éventuelle somme de la série ...

Lemme II.3.15 (fondamental)**.** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes* **réels positifs**. *On note* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite de ses sommes partielles.*

(1) Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est majorée, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente.*

(2) Si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas majorée, alors la série* $\sum u_n$ *est divergente et la suite des sommes partielles tend vers* $+\infty$.

On pourra noter dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$.

Théorème II.16 (Comparaison des séries à termes réels positifs)**.**
Soit $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries* **à termes positifs**, *au moins à partir d'un certain rang.*

(1) Si on a $u_n \leq v_n$ *à partir d'un certain rang, alors :*
- *si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge ;*
- *si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

(2) Si $u_n = O(v_n)$ *(en particulier si* $u_n = o(v_n)$*), alors*
- *si* $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge ;*
- *si* $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

(3) Si $u_n \sim v_n$, *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature (convergentes toutes les deux ou divergentes toutes les deux).*

Les résultats (2) *et* (3) *s'appliquent de la même manière à deux séries à termes négatifs.*

Remarque. Pour utiliser le résultat (3), il suffit en fait de savoir qu'une des deux suites est positive. Le fait qu'elles soient équivalentes suffit alors à dire que l'autre est positive à partir d'un certain rang.

Méthode.
Pour déterminer la nature d'une série à termes positifs, on pensera d'abord à en déterminer un équivalent *simple*.
Pour cela, il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser les DL, les règles de calcul sur les équivalents suffisent souvent.
La comparaison à une série de Riemann sera également très utilisée.
Pour montrer que $u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$.
Pour montrer que $\frac{1}{n^\alpha} = o(u_n)$, il suffit de montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = +\infty$.

Exercice II.3.17. (1) Déterminer la nature des séries $\sum\limits_{n\geq 2} u_n$ suivantes :

$$(a)\quad u_n = \frac{\operatorname{ch}(n)}{\operatorname{ch}(2n)}\,;\quad (b)\quad u_n = \frac{1}{n\cos^2(n)}\,;\quad (c)\quad u_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n;\quad (d)\quad u_n = n^2\,\mathrm{e}^{-n}\ln(n).$$

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \alpha\sin\left(\frac{1}{n}\right)$?

b. Convergence absolue

Définition II.3.18. Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que $\sum u_n$ converge absolument lorsque la série à termes réels positifs $\sum |u_n|$ est une série convergente. On parle alors de convergence absolue de $\sum u_n$ et on peut noter $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$.

Théorème II.19. *Soit $\sum u_n$ une série numérique. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente et dans ce cas :*

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Remarque. ✌ Dans la pratique, l'utilisation du module (ou valeur absolue) permet d'étudier la nature d'une série à termes positifs et d'utiliser les résultats déjà vus précédemment.
Dans le cas où la série $\sum |u_n|$ diverge, on ne peut malheureusement pas conclure ...

Exercice II.3.20. Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que $\sum(u_n + \lambda v_n)$ est une série absolument convergente.

Exercice II.3.21. (1) Nature de la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ où $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{n^2}$?

(2) Nature de la série $\sum \dfrac{n^2 \cos(n)}{2^n}$?

4) Un équivalent à retenir : la formule de Stirling

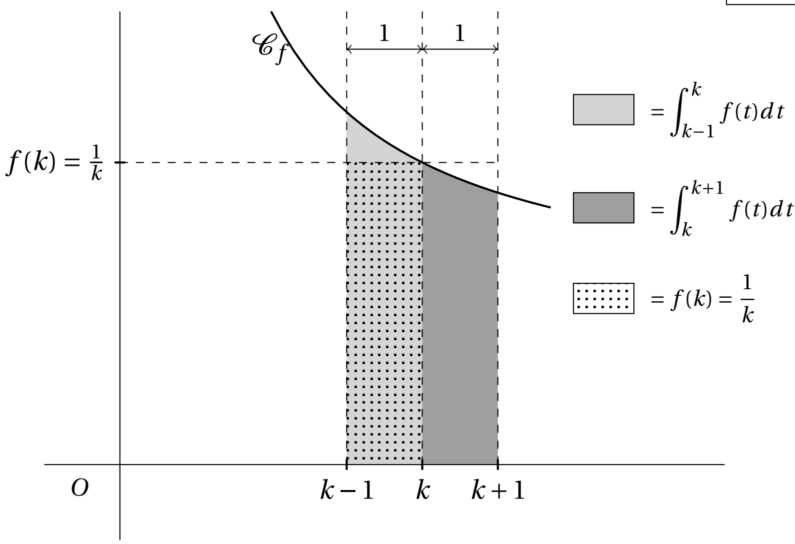
Proposition II.4.22.

$$n! \sim \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}.$$

5) Comparaison série-intégrale

Cette technique a été utilisée en première année pour établir le résultat sur les séries de Riemann. Reprenons la démonstration dans le cas de la série harmonique.

Exemple II.5.23. On note $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \geq 1$. Traçons le graphe de la fonction inverse (notée f) sur $]0;+\infty[$, fonction **continue et décroissante** sur cet intervalle. Pour tout $n \geq 1$: $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)}$.



Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k) \quad \text{car } f \text{ est décroissante.}$$

On a aussi, pour tout $k \geq 2$:

$$f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt.$$

Ainsi, en sommant ces inégalités et en utilisant la relation de Chasles, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$\int_1^{n+1} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = 1 + \int_1^n f(t)dt.$$

Or, $\int_1^n f(t)dt = \int_1^n \frac{dt}{t} = \ln(n)$ donc

$$\forall n \geq 1,\ \ln(n) \sim \overbrace{\ln(n)}^{\longrightarrow +\infty} + \overbrace{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{\longrightarrow 0} = \ln(n+1) \leq S_n \leq 1 + \ln(n) \sim \ln(n).$$

Par encadrement, on en déduit que $\boxed{S_n \sim \ln(n)}$ donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty}$ et $\boxed{\sum \frac{1}{n} \text{ diverge}}$.

Exercice II.5.24. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ u_n = S_n - \ln(n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$.
En utilisant une série, démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
Il existe donc un réel γ appelé constante d'Euler tel qu'on ait le développement asymptotique suivant :

$$\boxed{S_n = \ln(n) + \gamma + o(1)}.$$

Exemple II.5.25. $\boxed{\text{Soit } \alpha \in]1;+\infty[.}$ On note $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}}$ pour tout $n \geq 1$ (somme partielle associée à une série de Riemann convergente).

La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est définie sur $]0;+\infty[$, **continue et décroissante** sur cet intervalle. Pour tout $n \geq 1$: $\boxed{S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, puisque f est décroissante : $\int_k^{k+1} f(t)dt \leq \int_k^{k+1} f(k)dt = f(k)$.
On a aussi, pour tout $k \geq 2$: $f(k) = \int_{k-1}^{k} f(k)dt \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt$.

Ainsi, en sommant ces inégalités et en utilisant la relation de Chasles, on obtient pour tout $n \geq 1$:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = 1 + \int_1^n t^{-\alpha}dt = 1 + \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n = 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right) = 1 + \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq 1 + \frac{1}{\alpha-1}.$$

La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série à termes positifs donc, puisque la suite des ses sommes partielles est majorée, $\boxed{\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge}}$.
Notons S sa somme.

Pour être plus complet, cherchons un équivalent de $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f(k)$. Soit $n \geq 1$.

- Soit $N \geq n+1$. En utilisant les mêmes inégalités que précédemment :
$$\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt = \sum_{k=n+1}^{N} \int_k^{k+1} f(t)dt \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \sum_{k=n+1}^{N} \int_{k-1}^{k} f(t)dt = \int_n^N f(t)dt$$
- $\int_{n+1}^{N+1} f(t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - (n+1)^{1-\alpha}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}(n+1)^{1-\alpha}$ et
$\int_n^N f(t)dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha} - n^{1-\alpha}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}n^{1-\alpha}$.
Ainsi, en faisant tendre N vers $+\infty$ dans l'encadrement précédent (les trois limites existent) :
$$\frac{1}{\alpha-1}\underbrace{(n+1)^{1-\alpha}}_{\sim n^{1-\alpha}} \leq R_n \leq \frac{1}{\alpha-1}n^{1-\alpha}.$$
- Par encadrement, on conclut que $\boxed{R_n \sim \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}}$.

6) Exercice classique : les séries de Bertrand

Soit a et b deux réels. On veut déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln^b(n)}{n^a}$.

(1) Montrer que si $a > 1$ alors la série converge .

(2) Montrer que si $a < 1$ alors la série diverge.

(3) Dans cette question, on considère que $a = 1$.

  (a) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que si $b = -1$ alors la série diverge .

  (b) En déduire que si $b > -1$ alors la série diverge .

  (c) À l'aide d'une comparaison série/intégrale, montrer que si $b < -1$ la série converge.

Les résultats de cet exercice sont classiques mais hors-programme. On devra éventuellement vous demander de les redémontrer avant de les utiliser.

III – Programme de deuxième année

1) Critère de d'Alembert

Théorème III.1. *Soit $\sum u_n$ une série numérique. On suppose que $u_n \neq 0$ à partir d'un certain rang.*
On suppose l'existence de $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$.

(1) *Si $\ell > 1$, la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.*

(2) *Si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ converge absolument donc converge.*

(3) *Si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure ...*

Remarque. Dans le cas d'une série à termes positifs, les valeurs absolues sont inutiles.
En cas de convergence, il est également inutile de parler de *convergence absolue.*

Exemple III.1.2. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ converge absolument.
Ici, on n'a pas besoin d'utiliser Taylor-Lagrange pour prouver la convergence !
On rappelle qu'on savait déjà la convergence et le fait que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z$.

2) Théorème spécial des séries alternées

Définition III.2.3. Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. On dit que la série $\sum u_n$ est alternée si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = (-1)^n |u_n| \quad \text{ou} \quad u_n = (-1)^{n+1} |u_n|.$$

Autrement dit, une série est alternée lorsqu'il y a *alternance* du signe de u_n : $u_n = (-1)^n b_n$ avec $b_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème III.4 (Théorème spécial des séries alternées)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels.*
On suppose que :

- *la série $\sum u_n$ est* **alternée** *;*
- *la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est* **décroissante et converge vers** 0.

Alors :

- *la série $\sum u_n$ converge. Notons S sa somme.*
- *S est du signe de u_0 et $|S| \leq |u_0|$;*
  (si le premier terme n'est pas u_0 mais u_1 ou u_2, il suffit d'adapter cet énoncé : "La somme est du signe du premier terme et est majorée en valeur absolue par ce premier terme")
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ est du signe de u_{n+1} et est majoré en valeur absolue par $|u_{n+1}|$:*
  autrement dit $|R_n| \leq |u_{n+1}|$ ("le reste est du signe de son premier terme et est majoré en valeur absolue par ce premier terme").

Remarque. (1) ⚠ Il peut arriver que la suite $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ne soit décroissante qu'à partir d'un certain rang $n_0 \geq 1$.
Le théorème spécial assure la convergence de la série $\sum u_n$ mais les autres conclusions doivent être adaptées.
On ne peut rien dire du signe de la somme mais seulement des restes si $n \geq n_0 - 1$:
pour tout $n \geq n_0 - 1$, R_n est du signe de u_{n+1} et majoré en valeur absolue par $|u_{n+1}|$.
En fait, dans ce cas, on applique simplement le théorème à la série $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$.

(2) Si la série est absolument convergente, il est inutile d'utiliser le théorème spécial pour déterminer sa convergence. En revanche, le théorème spécial donne des indications supplémentaires : signe de la somme, contrôle du reste ... Par exemple, étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$ et donner toutes les informations déduites du théorème.

Exemple III.2.5. On retrouve que la série harmonique alternée $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ est convergente. Il en est de même de toutes les séries $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$ si $\alpha > 0$, par exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Exercice III.2.6. (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1+u_n)$.
Montrer que $u_n \sim v_n$ mais que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas de même nature.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}} + \cos(n)}$. Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Remarque. La méthode utilisée dans l'exercice précédent est classique pour étudier la nature d'une série non absolument convergente et pour laquelle le théorème spécial ne s'applique pas (ou pas facilement !).
En utilisant les développements limités usuels, on écrit le terme général u_n comme une somme de termes que l'on reconnaît comme termes généraux de séries convergentes ou divergentes : séries de référence, séries alternées, séries absolument convergentes ... On dit alors qu'on utilise une *méthode par éclatement*.

3) Produit de Cauchy

Définition III.3.7. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques. On appelle produit de Cauchy de ces deux séries la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ w_n = \sum_{p+q=n} u_p v_q = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$

Théorème III.8 (ADMIS)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ deux séries numériques. Si les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum_{n\geq 0} w_n$ converge absolument donc converge et :*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

Exemple III.3.9. En utilisant le produit de Cauchy, on retrouve une propriété fondamentale de l'exponentielle :

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}.$$

Remarque.
Dans le cas où au moins l'une des deux suites u et v n'est définie que sur $\mathbb{N}^*$ (ou $\mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, etc), on peut bien sûr utiliser le théorème précédent. Il suffit alors de *compléter* les suites en supposant les premiers termes nuls.

Par exemple, supposons que $\sum_{n\geq 1} u_n$ et $\sum_{n\geq 1} v_n$ sont deux séries absolument convergentes. On pose alors $u_0 = 0$ et $v_0 = 0$.
Le théorème s'applique mais on peut remarquer que dans ce cas : $w_0 = u_0 v_0 = 0$ et $w_1 = u_0 v_1 + u_1 v_0 = 0$.
On peut écrire ainsi la conclusion : $\sum_{n\geq 2} w_n$ converge absolument et $\sum_{n=2}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} u_n\right) \times \left(\sum_{n=1}^{+\infty} v_n\right)$.

4) Suite sommable et permutation des termes

Proposition III.4.10. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. On suppose que la série $\sum u_n$ est* **absolument convergente**. *Alors, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\varphi(n)}$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Ce résultat permet, dans le cas d'absolue convergence, de sommer les termes de la suite u dans n'importe quel ordre.

Ce résultat sera utilisé dans le cadre du cours sur les Probabilités.

On dit alors que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable. Sa somme peut se noter $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Démonstration. [NON EXIGIBLE]

Soit $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

- La série $\sum |u_{\varphi(n)}|$ est une série à termes positifs. Montrons que la suite de ses sommes partielles est majorée.
  Soit $N \in \mathbb{N}$. L'ensemble $\{\varphi(0),\dots,\varphi(N)\}$ est fini donc il possède un plus grand élément M.
  On a alors $\{\varphi(0),\dots,\varphi(N)\} \subset \{0,1,\dots,M\}$ et :

$$\sum_{n=0}^{N} |u_{\varphi(n)}| \leq \sum_{n=0}^{M} |u_n| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

  Ainsi, par caractérisation, la série à termes positifs $\sum |u_{\varphi(n)}|$ converge et donc
  la série $\boxed{\sum u_{\varphi(n)} \text{ est absolument convergente}}$ donc convergente.

- Montrons l'égalité des sommes. Notons $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$. Soit $\varepsilon > 0$. D'après l'absolue convergence, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\sum\limits_{n=n_0+1}^{+\infty} |u_n| \leq \varepsilon$.
  Il existe un entier $n_1 \in \mathbb{N}$ (par exemple le plus grand élément de $\varphi^{-1}([\![0;n_0]\!])$) tel que $[\![0;n_0]\!] \subset \varphi([\![0;n_1]\!])$.

  Soit $n \geq n_1$. Par définition de n_1, on a aussi $[\![0;n_0]\!] \subset \varphi([\![0;n]\!])$. Notons $n'_0 = \max \varphi([\![0;n]\!]) \geq n_0$.
  Dans la somme $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)}$, on trouve :
  — tous les termes u_0, u_1, ..., u_{n_0} ;
  — certains termes (mais pas forcément tous) parmi u_{n_0+1}, ..., $u_{n'_0}$;
  — aucun terme u_k pour $k > n'_0$.

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \right| = \left| \sum_{k=0}^{n_0} u_k + \sum_{k=n_0+1}^{n'_0} u_k + \sum_{k=n'_0+1}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \right|.$$

  TOUS les termes de la première somme se simplifient avec certains termes de la dernière somme et TOUS les autres termes de la dernière somme se simplifient avec certains termes de la deuxième somme, il reste alors :

$$\left| S - \sum_{k=0}^{n} u_{\varphi(k)} \right| = \left| \sum_{\substack{k=n_0+1 \\ k\notin\varphi([\![0;n]\!])}}^{n'_0} u_k + \sum_{k=n'_0+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \left| \sum_{\substack{k=n_0+1 \\ k\notin\varphi([\![0;n]\!])}}^{n'_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=n'_0+1}^{+\infty} u_k \right| \leq \sum_{\substack{k=n_0+1 \\ k\notin\varphi([\![0;n]\!])}}^{n'_0} |u_k| + \sum_{k=n'_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq \sum_{k=n_0+1}^{+\infty} |u_k| \leq \varepsilon,$$

  ce qui montre que $\boxed{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\varphi(n)} = S}$.

$\square$