PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 06/10/2025 AU 10/10/2025

Réduction

1) Éléments propres

2) Polynôme caractéristique

3) Diagonalisation

- Définitions.
- Caractérisations (...). Conditions suffisantes (polynôme caractéristique scindé à racines simples ; théorème spectral)
- Diagonalisation et polynôme annulateurs. Une valeur propre est racine d'un polynôme annulateur. Caractérisations de la diagonalisabilité (...). Si u est diagonalisable, un endomorphisme induit l'est aussi.

4) Trigonalisation

- Définitions.
- Caractérisation.
- Pratique de la trigonalisation en petite dimension.

Questions de cours :

(1) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Soit $x \in E$.
- Si $u(x) = \lambda x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.
- Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est racine de P.

(2) Diagonalisation de $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. (3) Trigonalisation de $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

(4) Tout sur les séries géométriques.

(5) Un cas de série de Bertrand $\sum_{n \geq 2} \frac{\ln^b(n)}{n^a}$: le cas $a < 1$, le cas $a > 1$ ou les deux si le temps le permet.

(6) Montrer à l'aide d'une comparaison série/intégrale que la série harmonique diverge et que $S_n \sim \ln(n)$.