Des intégrales de Wallis à la formule de Stirling

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\boxed{I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^n dt}$.

(1) Calculer I_0 et I_1.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant une intégration par parties, démontrer que $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$.

(3) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_{2n} = \dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\dfrac{\pi}{2}$.

(4) Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, convergente et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n.$$

(5) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_n I_{n+1} = \dfrac{\pi}{2}$ et en déduire que $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $\boxed{u_n = \dfrac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^n\sqrt{n}}}$, $\boxed{v_n = \ln(u_n)}$ et, pour tout $n \geq 2$: $\boxed{w_n = v_n - v_{n-1}}$.

(6) (a) Déterminer un équivalent de w_n.

(b) En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite non nulle que l'on notera ℓ.

(c) Démontrer que $n! \sim \ell\, n^n\, \mathrm{e}^{-n}\sqrt{n}$.

(7) En utilisant le résultat de la question (3), en déduire la formule de Stirling :

$$\boxed{n! \sim \frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\sqrt{2\pi n}}.$$