

1) Propriétés de l'espérance

Théorème .1 (Théorème de transfert). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire discrète définie sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit f une fonction définie sur $X(\Omega)$ et à valeurs réelles ou complexes.

La variable aléatoire $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est finie ou sommable. On a alors :

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x).$$

Cette somme est une somme finie ou la somme d'une famille sommable selon la nature de $X(\Omega)$.

Démonstration. On notera $Y = f(X)$. On admet que Y est une variable aléatoire discrète.

- L'ensemble $Y(\Omega)$ est fini ou dénombrable.

Pour tout $y \in Y(\Omega)$, notons $A_y = f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X(\Omega) \mid f(x) = y\}$.

La famille $(A_y)_{y \in Y(\Omega)}$ est une partition de $X(\Omega)$.

Nous allons pouvoir appliquer le principe de sommation par paquets

à la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

- Soit $y \in Y(\Omega)$.

$$\sum_{x \in A_y} \underbrace{|f(x)P(X = x)|}_{\geq 0} = \sum_{x \in A_y} \underbrace{|f(x)|}_{=y} P(X = x) = |y| \sum_{x \in A_y} P(X = x) = |y|P(X \in A_y) = |y|P(f(X) = y) = |y|P(Y = y),$$

la finitude du résultat assurant a posteriori la sommabilité de $(|f(x)P(X = x)|)_{x \in A_y}$ (famille de réels positifs).

Ainsi, par le principe de sommation par paquets, la famille $(f(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est finie ou sommable si et seulement si la famille $(|y|P(Y = y))_{y \in Y(\Omega)}$ est finie ou sommable si et seulement si Y est d'espérance finie.

- Supposons que ce soit le cas. Calculons alors la somme par paquets (calculs analogues mais sans les modules) :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} f(x)P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} \sum_{x \in A_y} f(x)P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = E(Y),$$

ce qu'on voulait.

□

Proposition .1.2 (ADMIS). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On suppose que Y est à valeurs réelles **positives** et que X est à valeurs réelles ou complexes.

Si $E(Y) < +\infty$ et $|X| \leq Y$, alors X est d'espérance finie.

Démonstration. • On note $Z = (X, Y)$. On définit sur $Z(\Omega)$ les applications $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$, de sorte que $X = p_1(Z)$ et $Y = p_2(Z)$.

- Supposons que Y est d'espérance finie et $|X| \leq Y$.

D'après le théorème de transfert, la famille $(p_2(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ est finie ou sommable. Par hypothèse, pour tout $z \in Z(\Omega) : |p_1(z)| \leq p_2(z)$ donc $|p_1(z)P(Z = z)| \leq p_2(z)P(Z = z)$. Ainsi, par comparaison, la famille $(p_1(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ est finie ou sommable ce qui, à nouveau par le théorème de transfert, assure que X est d'espérance finie.

□

Proposition .1.3 (Linéarité de l'espérance - ADMIS). Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé.

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes réelles ou complexes définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Si X et Y sont d'espérance finie, alors $X + \lambda Y$ est d'espérance finie et $E(X + \lambda Y) = E(X) + \lambda E(Y)$.

Démonstration. • On note $Z = (X, Y)$. On définit sur $Z(\Omega)$ les applications $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$, de sorte que $X = p_1(Z)$ et $Y = p_2(Z)$.

- Supposons que X et Y sont d'espérance finie.

D'après le théorème de transfert, les familles $(p_1(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ et $(p_2(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ sont finie ou sommables. Par opérations (entre familles sommables),

la famille $((p_1(z) + \lambda p_2(z))P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)} = ((p_1 + \lambda p_2)(z)P(Z = z))_{z \in Z(\Omega)}$ est finie ou sommable donc, à nouveau par le théorème de transfert, $(p_1 + \lambda p_2)(Z) = X + \lambda Y$ est d'espérance finie.

- Calculons alors l'espérance de $X + \lambda Y$:

$$E(X + \lambda Y) = \sum_{z \in Z(\Omega)} (p_1(z) + \lambda p_2(z))P(Z = z) = \sum_{z \in Z(\Omega)} p_1(z)P(Z = z) + \lambda \sum_{z \in Z(\Omega)} p_2(z)P(Z = z) = E(X) + \lambda E(Y).$$

□