

Probabilités

1) Dénombrabilité - Sommabilité

Pas d'exercice sur ces sujets hors cadre des probabilités.

2) Vocabulaire des probabilités

3) Espaces probabilisés

4) Probabilités conditionnelles

5) Loi d'une variable aléatoire

- Distribution de probabilités. Définition de la loi d'une variable aléatoire discrète et caractérisation par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.
- Lois usuelles de deuxième année : loi de Poisson, loi géométrique.
- Fonction de variable(s) aléatoire(s).
- Couples de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales. n -uplet de variables aléatoires.

6) Indépendance

- Événements indépendants (deux événements). Famille d'événements indépendants.
- Variables aléatoires indépendantes (deux variables). Définition, caractérisation. Si X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Famille de variables aléatoires indépendantes. Définition et caractérisations.
- Lemme des coalitions.
- Suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid).

Espérance - Variance

Peu d'exercices traités sur ces sujets mais un calcul d'espérance peut être demandé.

7) Espérance

- (1) Définition. Espérance des lois usuelles. Cas particulier d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$.
- (2) Théorème de transfert. Propriétés : comparaison, linéarité, positivité/croissance, critère de nullité (presque sûre) dans le cas d'une v.a. positive, espérance d'un produit en cas d'indépendance.

Questions de cours :

- (1) On considère une pièce équilibrée lancée jusqu'à obtenir Pile. On modélise ce jeu en notant $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$, c'est-à-dire en considérant qu'on lance la pièce indéfiniment. Calculer de deux manières la probabilité que le jeu se termine :
 - (a) En utilisant les événements B_n : "obtenir Pile au moins une fois lors des n premiers lancers".
 - (b) En utilisant les événements $X = n$ où X est le rang d'apparition du premier Pile si celui-ci apparaît et qui vaut $+\infty$ sinon.
- (2) On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. Si on obtient Pile au n -ième tirage, on pioche un ticket dans une urne contenant n tickets dont un seul est gagnant.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile et qui prend la valeur $+\infty$ si on n'obtient jamais Pile (on ne peut alors pas gagner!). On note G l'événement "piocher le ticket gagnant dans l'urne".

 - (a) Calculer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire que $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est un système quasi-complet d'événements.
 - (b) Montrer que $P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$. On admet que $P(G) = \ln(2)$.
 - (c) Sachant que le ticket gagnant a été pioché, calculer la probabilité que l'urne n'ait contenu qu'un seul ticket.
- (3) Définition d'un système quasi-complet d'événements. Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales dans le cas d'un tel système.
- (4) Définition (on vérifiera que la définition fait apparaître une distribution de probabilités), espérance et variance de la loi géométrique et/ou de la loi de Poisson (au choix de l'interrogateur).
- (5) Si X et Y sont deux var indépendantes telles que $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$, alors $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$.