

## Probabilités

Programme de la semaine dernière.

### Espérance - Variance

#### 1) Espérance

- (1) Définition. Espérance des lois usuelles. Cas particulier d'une variable à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .
- (2) Théorème de transfert. Propriétés : comparaison, linéarité, positivité/croissance, critère de nullité (presque sûre) dans le cas d'une v.a. positive, espérance d'un produit en cas d'indépendance.

#### 2) Variance

- (1) Si  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie. Cauchy-Schwarz. L'ensemble des variables aléatoires discrètes réelles  $X$  définies sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  et telles que  $E(X^2) < +\infty$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
- (2) Définition de la variance et de l'écart-type. Formule  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ . Variance des lois usuelles.
- (3) Propriétés :  $V(aX + b) = a^2V(X)$ , covariance, variance d'une somme en cas d'indépendance deux à deux.

#### 3) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

- (1) Inégalité de Markov - Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- (2) Loi faible des grands nombres.

Questions de cours :

- (1) On considère une pièce équilibrée lancée jusqu'à obtenir Pile. On modélise ce jeu en notant  $\Omega = \{P, F\}^{\mathbb{N}}$ , c'est-à-dire en considérant qu'on lance la pièce indéfiniment. Calculer de deux manières la probabilité que le jeu se termine :
  - (a) En utilisant les événements  $B_n$  : "obtenir Pile au moins une fois lors des  $n$  premiers lancers".
  - (b) En utilisant les événements  $X = n$  où  $X$  est le rang d'apparition du premier Pile si celui-ci apparaît et qui vaut  $+\infty$  sinon.
- (2) On lance une pièce équilibrée jusqu'à obtenir Pile. Si on obtient Pile au  $n$ -ième tirage, on pioche un ticket dans une urne contenant  $n$  tickets dont un seul est gagnant.
 

On note  $X$  la variable aléatoire qui prend pour valeur le rang d'apparition du premier Pile et qui prend la valeur  $+\infty$  si on n'obtient jamais Pile (on ne peut alors pas gagner!). On note  $G$  l'événement "piocher le ticket gagnant dans l'urne".

  - (a) Calculer  $P(X = n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et en déduire que  $(X = n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est un système quasi-complet d'événements.
  - (b) Montrer que  $P(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$ . On admet que  $P(G) = \ln(2)$ .
  - (c) Sachant que le ticket gagnant a été pioché, calculer la probabilité que l'urne n'ait contenu qu'un seul ticket.
- (3) Définition d'un système quasi-complet d'événements. Énoncé et démonstration de la formule des probabilités totales dans le cas d'un tel système.
- (4) Définition (on vérifiera que la définition fait apparaître une distribution de probabilités), espérance et variance de la loi géométrique et/ou de la loi de Poisson (au choix de l'interrogateur).
- (5) Si  $X$  et  $Y$  sont deux var indépendantes telles que  $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$  et  $Y \sim \mathcal{P}(\mu)$ , alors  $X + Y \sim \mathcal{P}(\lambda + \mu)$ .
- (6) Définition de la variance (sous l'hypothèse  $E(X^2) < +\infty$ , on justifiera que  $X$  est d'espérance finie puis que la variance est bien définie). Démonstration de la formule  $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$ .
- (7) Énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et de la loi faible des grands nombres.