1) Intégration par parties - Changement de variable

Théorème .1 (Intégration par parties)**.** *Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.*
Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]a;b[$.

Si $\lim\limits_{t \to a^+} f(t)g(t)$ *et* $\lim\limits_{t \to b^-} f(t)g(t)$ *existent et sont finies,*
alors *les intégrales généralisées* $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)dt$ *et* $\displaystyle\int_a^b f'(t)g(t)dt$ *sont de même nature.*

En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt,$$

où on a noté $\left[f(t)g(t)\right]_a^b = \lim\limits_{t \to b^-} f(t)g(t) - \lim\limits_{t \to a^+} f(t)g(t)$.

Démonstration. Supposons que $\lim\limits_{t \to a^+} f(t)g(t)$ et $\lim\limits_{t \to b^-} f(t)g(t)$ existent et sont finies.
Soit $c \in]a;b[$.

- f est dérivable donc continue sur $]a;c]$. Soit $x \in]a;c]$. f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[x;c]$, utilisons donc le théorème de première année :
$$\int_x^c f(t)g'(t)dt = \left[f(t)g(t)\right]_x^c - \int_x^c f'(t)g(t)dt = f(c)g(c) - f(x)g(x) - \int_x^c f'(t)g(t)dt.$$
Par opérations (sur les limites), l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{]a;c]} fg'$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{]a;c]} f'g$ et, en cas de convergence :
$$\int_a^c f(t)g'(t)dt = f(c)g(c) - \lim_{x \to a} f(x)g(x) - \int_a^c f'(t)g(t)dt.$$
- De manière complètement analogue, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{[c;b[} fg'$ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{[c;b[} f'g$ et, en cas de convergence :
$$\int_c^b f(t)g'(t)dt = \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)g(t)dt.$$
- En combinant les résultats des deux points précédents :
$\boxed{\text{l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_{]a;b[} fg' \text{ est convergente si et seulement si l'intégrale généralisée } \displaystyle\int_{]a;b[} f'g \text{ est convergente}}$
et, en cas de convergence :
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g'(t)dt &= \int_a^c f(t)g'(t)dt + \int_c^b f(t)g'(t)dt \\ &= f(c)g(c) - \lim_{x \to a} f(x)g(x) - \int_a^c f'(t)g(t)dt + \lim_{x \to b} f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)g(t)dt \\ &= \lim_{x \to b} f(x)g(x) - \lim_{x \to a} f(x)g(x) - \int_a^b f'(t)g(t)dt \\ &= \boxed{\left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)dt}.\end{aligned}$$

□

Théorème .2 (Changement de variable - Cas croissant)**.**
Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tels que* $a < b$. *Soient* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *et* $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *tels que* $\alpha < \beta$.
Soit $\varphi :]\alpha;\beta[\longrightarrow]a;b[$ *une fonction de classe* $\mathscr{C}^1$*, bijective et* **strictement croissante**.
Soit f *une fonction définie et continue par morceaux sur* $]a;b[$.

Alors les intégrales généralisées $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ *et* $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ *sont de même nature.*

En cas de convergence : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$.

Démonstration. (1) Commençons par montrer que le résultat de première année peut être utilisé pour la restriction de f à un segment de $]a;b[$ (qui n'est sur ce segment que **continue par morceaux**).

Notons $[p;q]$ un segment inclus dans $]a;b[$. Il existe alors une subdivision $(y_k)_{0\leq k\leq n}$ de $[p;q]$ telle que, pour tout $1 \leq k \leq n$, $f_{|]y_{k-1};y_k[}$ soit continue sur $]y_{k-1};y_k[$ et prolongeable par continuité à $[y_{k-1};y_k]$, prolongement noté f_k.

On note alors, pour tout $0 \leq k \leq n$, $x_k = \varphi^{-1}(y_k)$. La stricte croissance de φ (et donc de φ^{-1}) assure que $(x_k)_{0\leq i\leq n}$ est une subdivision de $[\varphi^{-1}(p);\varphi^{-1}(q)]$ (qui est un segment par continuité de φ^{-1} !). Grâce à cette subdivision et aux opérations sur les limites (φ et φ' sont continues sur $]\alpha;\beta[$), on obtient que $g = (f\circ\varphi)\times\varphi'$ est continue par morceaux sur $[\varphi^{-1}(p);\varphi^{-1}(q)]$.
Pour tout $1 \leq k \leq n$, le prolongement de $g_{|]x_{k-1};x_k[}$ à $[x_{k-1};x_k]$ par continuité est $g_k = (f_k\circ\varphi)\times\varphi'$. Utilisons maintenant le théorème vu en première année et la définition d'intégrale d'une fonction continue par morceaux :

$$\int_{\varphi^{-1}(p)}^{\varphi^{-1}(q)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du \overset{def}{=} \sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k} f_k(\varphi(u))\varphi'(u)\,du \overset{PCSI}{=} \sum_{k=1}^{n}\int_{y_{k-1}}^{y_k} f_k(t)\,dt \overset{def}{=} \int_p^q f(t)\,dt.$$

(2) Montrons maintenant le résultat pour les intégrales généralisées.

Soit $\gamma \in]\alpha;\beta[$. Notons $c = \varphi(\gamma) \in]a;b[$. Représentons les tableaux de variations de φ et φ^{-1} pour y repérer les limites utiles dans cette démonstration :

x	α	γ	β
φ	a $\nearrow$	c	$\nearrow$ b

x	a	c	b
φ^{-1}	α $\nearrow$	γ	$\nearrow$ β

- Soit $x \in [\gamma;\beta[$.

D'après l'extension du théorème de changement de variable vu dans la première partie ($[c;\varphi(x)]$ est un segment) :

$$\int_c^{\varphi(x)} f(t)\,dt = \int_\gamma^x f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

On a $\lim\limits_{x\to\beta} \varphi(x) = b$ donc, si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\gamma^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ converge et ces intégrales sont égales.

- Soit $y \in [c; b[$. Encore d'après la première partie ($[c; y]$ est un segment) :

$$\int_c^y f(t)\,dt = \int_\gamma^{\varphi^{-1}(y)} f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du.$$

  On a $\lim\limits_{y\to b} \varphi^{-1}(y) = \beta$ donc, si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_\gamma^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ converge, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ converge et ces intégrales sont égales.

- Finalement, les intégrales $\displaystyle\int_\gamma^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ et $\displaystyle\int_c^b f(t)\,dt$ sont de même nature et sont égales en cas de convergence.

  Il en est de même (démonstration identique à celle-ci) des intégrales $\displaystyle\int_\alpha^\gamma f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ et $\displaystyle\int_a^c f(t)\,dt$.

  Par définition : $\boxed{\text{les intégrales } \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du \text{ sont de même nature et égales en cas de convergence}}$.

Dans le cas où φ est décroissante, il faut modifier les tableaux de variations et les bornes sont échangées : on obtient que les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_\beta^\alpha f(\varphi(u))\varphi'(u)\,du$ sont de même nature et égales en cas de convergence, d'où la nécessité du signe *moins* pour avoir l'égalité de l'énoncé.

$\square$