

PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 24/11/2025 AU 28/11/2025

Probabilités

Programme de la semaine dernière.

Espérance - Variance

Programme de la semaine dernière.

Intégration sur un intervalle

- (1) (a) Fonctions continues par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale. Linéarité, positivité, Chasles, inégalité triangulaire.
(b) Théorème fondamental du calcul intégral : version pour une fonction continue par morceaux ; version pour une fonction continue.
- (2) Intégrales généralisées.
(a) Définition(s), exemples, fonctions de référence.
(b) Théorèmes de comparaison pour des fonctions positives.
(c) Linéarité, positivité, Chasles.
(d) Intégration par parties, changement de variable.
- (3) Intégrabilité (= absolue convergence)
(a) Définition. Lien avec la convergence de l'intégrale généralisée + inégalité triangulaire.
(b) Critère de nullité.
(c) $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
(d) Fonctions de référence et théorèmes de comparaison.

Questions de cours :

- (1) On suppose que $E(X^2) < +\infty$. Montrer que X est d'espérance finie, définir la variance et démontrer que $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$.
- (2) Énoncé de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Application : démontrer la loi faible des grands nombres.
- (3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature des intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.
- (4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature des intégrales généralisées $\int_0^1 \ln(t) dt$ et $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$.
- (5) On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Déterminer le domaine de définition de Γ et calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (6) Montrer que l'intégrale suivante est convergente et calculer sa valeur : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ (on pourra utiliser le chgt de variable $t = \cos^2(x)$).