

Intégration sur un intervalle

- (1) (a) Fonctions continues par morceaux sur un segment. Définition de l'intégrale. Linéarité, positivité, Chasles, inégalité triangulaire.
 (b) Théorème fondamental du calcul intégral : version pour une fonction continue par morceaux ; version pour une fonction continue.
- (2) Intégrales généralisées.
 (a) Définition(s), exemples, fonctions de référence.
 (b) Théorèmes de comparaison pour des fonctions positives.
 (c) Linéarité, positivité, Chasles.
 (d) Intégration par parties - Changement de variable.
- (3) Intégrabilité (= absolue convergence)
 (a) Définition. Lien avec la convergence de l'intégrale généralisée + inégalité triangulaire.
 (b) Critère de nullité.
 (c) $L^1(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
 (d) Fonctions de référence et théorèmes de comparaison.
- (4) Théorème de convergence dominée (donné à ce stade sans le vocabulaire relatif aux suites de fonctions).

Intégrales à paramètre

⚠ Le TD sera fait en début de semaine mais plusieurs exemples ont été vus en cours .

- (1) Domaine de définition. Fonction bien définie sur un intervalle.
- (2) TCD à paramètre continu. Théorème de continuité (versions globale et locale).
- (3) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^p$ (versions globale et locale). Le cas de la classe $\mathcal{C}^\infty$ a été utilisé sur l'exemple de Γ .

Questions de cours (**deux questions** cette semaine) :

- (1) **OBLIGATOIRE** : N'importe quel théorème sur les intégrales à paramètre (TCD à paramètre continu. Théorème de continuité (versions globale et locale), théorème de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^p$ ou de classe $\mathcal{C}^\infty$ (versions globale et locale)).
- (2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Nature des intégrales généralisées $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$.
- (3) On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Déterminer le domaine de définition de Γ et calculer $\Gamma(n+1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (4) Montrer que l'intégrale suivante existe et calculer sa valeur : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ (on pourra utiliser le chgt de variable $t = \cos^2(x)$).
- (5) On considère la fonction

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t} dt.$$

Montrer que F est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer F' puis F .