Chapitre 7 - Intégrales à paramètre

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Toutes les fonctions considérées seront supposées à valeurs dans $\mathbb{K}$.

(1) Le théorème fondamental du calcul intégral donne des propriétés de la fonction $\boxed{x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt}$ selon la régularité de la fonction f (continue ou seulement continue par morceaux). On ne parle pas *d'intégrale à paramètre* dans ce cas, où le paramètre x se trouve *uniquement dans les bornes de l'intégrale*. On utilise le théorème fondamental du calcul intégral pour étudier une fonction définie par une telle intégrale.

(2) Dans le chapitre précédent, nous avons rencontré des intégrales dépendant d'un entier n (de la forme $\boxed{\int_I f_n(t)\,dt}$) et avons donné un théorème permettant de justifier une éventuelle convergence.
Dans ce cas, on ne parle pas non plus *d'intégrale à paramètre* mais de *suite d'intégrales*.

(3) On dit qu'une fonction u est définie par une intégrale à paramètre lorsque u est de la forme suivante :

$$\boxed{u : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt}.$$

Autrement dit, on parle d'intégrale à paramètre lorsque le *paramètre réel* (x ici) dont dépend la valeur de l'intégrale est *uniquement présent dans l'expression intégrée*. On rappelle que t est la variable muette d'intégration et que la valeur de l'intégrale ne dépend pas de t.

Nous allons nous donner dans ce chapitre les moyens d'étudier une telle fonction : domaine de définition, continuité, limites, dérivabilité, ...

(4) Si la valeur d'une intégrale dépend d'un paramètre présent à la fois dans les bornes et dans l'expression intégrée (par exemple $\boxed{x \mapsto \int_a^x f(x,t)\,dt}$), on n'aura aucun résultat général. Il faudra faire en sorte de transformer l'expression (Chasles, linéarité, changement de variable ...) pour faire apparaître une intégrale à paramètre (bornes fixées) et/ou utiliser le théorème fondamental du calcul intégral (paramètre seulement dans les bornes).
Par exemple $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt = x\int_0^x f(t)\,dt - \int_0^x tf(t)\,dt$ ou encore $\int_0^x (x-t)f(t)\,dt \overset{t=xu}{=} \int_0^1 x(x-xu)f(xu)\,du$ ...

Les fonctions ci-dessous sont des exemples de fonctions définies par une intégrale à paramètre. Certaines seront étudiées plus tard dans ce cours.

(1) $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$

(2) $\Gamma : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$

(3) $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,dt.$

(4) $g : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{\exp(-(1+t^2)x^2)}{1+t^2}\,dt.$

I – Étude d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

1) Domaine de définition

Méthode. On considère une fonction de la forme

$$u : x \longmapsto \int_a^b f(x,t)\,dt.$$

La première question à traiter est toujours le domaine de définition de la fonction u. Deux cas peuvent se présenter :

(1) On vous demande de vérifier que u **est bien définie sur un intervalle** A**.**
Pour cela, vous devez fixer $x \in A$ *(Soit $x \in A$.)*,
considérer la fonction $g_x : t \mapsto \ldots$ (ici, … est l'expression qui est sous l'intégrale dans la définition de u),
vérifier que g_x est définie et continue (par morceaux) sur $I =]a;b[$ (ou $I = [a;b[$ ou $I =]a;b]$ ou $I = [a;b]$) et
montrer que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b g_x(t)\,dt$ converge (si g_x est continue sur le segment $[a;b]$, il n'y a rien à faire !).

Pour cela, on utilisera généralement **l'intégrabilité** de g_x sur l'intervalle I.

(2) On vous demande de **déterminer le domaine de définition de** u. Dans ce cas, on vous demande de trouver TOUTES les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b \ldots\,dt$ converge.
On pourra être amené à considérer différents cas selon la valeur de x.

Très souvent, la fonction f est à valeurs réelles positives (respectivement négatives) et la convergence de l'intégrale est alors équivalente à l'intégrabilité. On rédigera alors ainsi :

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $g_x : t \mapsto \ldots$. Par opérations, g_x est définie et continue (par morceaux) sur I. De plus, g_x est à valeurs positives donc la convergence de l'intégrale généralisée est équivalente à l'intégrabilité de g_x.

$$\vdots$$

Finalement, g_x est intégrable sur I si et seulement si $x \in A$. Le domaine de définition de u est donc A.

Exemple I.1.1.

(1) On considère la fonction

$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

Montrer que la fonction F est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2) Déterminer le domaine de définition de la *fonction Gamma* définie par :

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$

On a déjà traité cet exercice mais on le rédige ici en utilisant l'intégrabilité.

2) Dérivées partielles d'une fonction de deux variables

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Notons $D = A \times I$. On considère une fonction de deux variables définie sur D :

$$f : \begin{array}{ccc} D & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) \end{array}.$$

En première année ont été définies les notions d'applications partielles, de continuité, de dérivées partielles, de classe $\mathscr{C}^1$, ... Nous y reviendrons plus en détail dans un chapitre ultérieur.

(1) Si elle existe, on définit sur D la fonction de deux variables $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est l'expression obtenue en dérivant l'expression $f(x,t)$ par rapport à la variable x, la variable <u>t étant considérée constante</u>.
Si elle existe, on définit de manière analogue la fonction de deux variables $(x,t) \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$.

(2) On peut généraliser la notion de dérivée partielle à des dérivées d'ordre supérieur.
Soit $t \in I$ (fixé!). Supposons que la fonction $\varphi : x \mapsto f(x,t)$ soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur A. Pour tout $k \in [\![1;n]\!]$ et tout $x \in A$, on notera

$$\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t) = \varphi^{(k)}(x).$$

Cette expression est donc obtenue en *dérivant k fois l'expression* $f(x,t)$ *par rapport à la variable* x, la variable <u>t étant considérée constante</u>.
On remarque que cette construction permet de définir sur $A \times I$ la fonction de deux variables $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Exemple I.2.2. Considérons la fonction de deux variables

$$f : \begin{array}{ccc}]0;+\infty[\times]0;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,t) & \longmapsto & f(x,t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} \end{array}.$$

Montrer l'existence et exprimer les dérivées partielles $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

3) Théorèmes sur les intégrales à paramètres

Les théorèmes qui suivent permettent de justifier qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est continue, de classe $\mathscr{C}^1$, de classe $\mathscr{C}^p$ sur un intervalle A et dans ce cas d'exprimer ses dérivées.

Théorème I.3 (Théorème de convergence dominée à paramètre réel)**.** *Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$.*
Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A \times I$. Soit a **un élément ou une extrémité de** *A.*
On suppose que :

- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ admet une limite finie en a notée $\ell(t)$; (on a donc $\ell(t) = \lim_{x\to a} f(x,t)$)*
- *pour tout $x \in A$, les fonctions $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;*
- *il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|f(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination**.

Alors :

- *la fonction $u : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est bien définie sur A et possède une limite finie en a ;*
- *la fonction ℓ est intégrable sur I ;*
- $\lim_{x\to a} u(x) = \int_I \ell(t)\,dt.$ *On a alors $\lim_{x\to a} \int_I f(x,t)\,dt = \int_I \lim_{x\to a} f(x,t)\,dt$.*

Remarque. On doit remarquer l'analogie avec le théorème de convergence dominée donné dans le cadre des suites de fonctions :

— on n'a plus $n \to +\infty$ mais $x \to a$ (le paramètre n'est plus un entier mais un réel) ;
— on retrouve les hypothèses de continuité par morceaux et de domination ainsi que les conclusions du TCD !

Théorème I.4 (Continuité - Version globale)**.**
Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A \times I$.
On suppose que :

- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;*
- *il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|f(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination**.

Alors *la fonction $u : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.*

Remarque. Ce théorème (comme les suivants) existe en version globale mais sera souvent utilisé dans sa version locale. En effet, la continuité et la dérivabilité sont des propriétés locales qu'il suffit de vérifier sur tout segment de A pour qu'elles soient vérifiées sur A tout entier.

Théorème I.5 (Continuité - Version locale)**.**

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A \times I$.

On suppose que :

- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;*
- *pour tout segment $[a;b]$ inclus dans A, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :*

$$\forall (x,t) \in [a;b] \times I,\ \left|f(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t).$$

Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination locale**.

Alors *la fonction $u : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est définie et continue sur A.*

Remarque. ✍ Dans ces théorèmes comme dans ceux qui suivront, les hypothèses de continuité par morceaux pourront être omises. Les fonctions seront bien souvent continues.

Méthode. ✌ On rappelle quelques méthodes bien utiles pour assurer l'hypothèse de domination (il s'agit de majorer un module/une valeur absolue) :

- pour majorer un produit de termes positifs, majorer chaque terme ;
- pour majorer un quotient de termes positifs, majorer le numérateur et minorer le dénominateur ;
- pour majorer le module d'une somme, penser à l'inégalité triangulaire ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq 1$, $|\cos(x)| \leq 1$ et $\sin(x) \leq |x|$;
- pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$; pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ (ou $\ln(1+x) \leq x$ pour tout $x \geq -1$)...

Théorème I.6 (Classe $\mathscr{C}^1$ - Version globale)**.**

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A \times I$.

On suppose que :

- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A (la fonction $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est donc bien définie sur $A \times I$) ;*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*

$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$

Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination**.

Alors :

- *la fonction $u : x \mapsto \int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;*
- *$u' : x \longmapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.*

Théorème I.7 (Classe $\mathscr{C}^1$ - Version locale)**.**
Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A \times I$.
On suppose que :

- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A (la fonction $(x,t) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est donc bien définie sur $A \times I$) ;*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *pour tout segment $[a;b]$ inclus dans A, il existe une fonction $\varphi_{a,b} : t \mapsto \varphi_{a,b}(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*
$$\forall (x,t) \in [a;b] \times I,\ \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leq \varphi_{a,b}(t).$$
Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination locale**.

Alors :

- *la fonction $u : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est intégrable sur I ;*
- *$u' : x \longmapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,dt$.*

Exemple I.3.8. On considère la fonction
$$F : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt.$$
On a déjà démontré que F est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

En utilisant la dérivée de F, trouver une expression de F ne faisant pas intervenir d'intégrale.

Théorème I.9 (Classe $\mathscr{C}^p$ - Version globale)**.**
Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A \times I$. Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
On suppose que :

- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur A (les fonctions $(x,t) \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont donc bien définies pour $1 \leq k \leq p$) ;*
- *pour tout $x \in A$, pour tout $k \in [\![1;p-1]\!]$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *il existe une fonction $\varphi : t \mapsto \varphi(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*
$$\forall (x,t) \in A \times I,\ \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right| \leq \varphi(t).$$
Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination**.

Alors :

- *la fonction $u : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur A ;*
- *pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I ;*
- *pour tout $k \in [\![1;p]\!]$: $u^{(k)} : x \longmapsto \displaystyle\int_I \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\,dt$.*

Théorème I.10 (Classe $\mathscr{C}^p$ - Version locale)**.**
Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A\times I$. Soit $p\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$.
On suppose que :

- *pour tout $x\in A$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur A (les fonctions $(x,t)\mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont donc bien définies pour $1\leq k\leq p$) ;*
- *pour tout $x\in A$, pour tout $k\in[\![1;p-1]\!]$, la fonction $t\mapsto \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $x\in A$, la fonction $t\mapsto \frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *pour tout segment $[a;b]$ inclus dans A, il existe une fonction $\varphi_{a,b}:t\mapsto\varphi_{a,b}(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*
$$\forall (x,t)\in[a;b]\times I,\ \left|\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)\right|\leq\varphi_{a,b}(t).$$
Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination locale**.

Alors :

- *la fonction $u:x\mapsto\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^p$ sur A ;*
- *pour tout $x\in A$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial^p f}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I ;*
- *pour tout $k\in[\![1;p]\!]$: $u^{(k)}:x\longmapsto\int_I\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.*

Remarque. Si la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A et qu'on peut écrire l'hypothèse de domination **pour chaque fonction** $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ (au moins sur tout segment de A), alors on peut utiliser les théorèmes précédents pour conclure que la fonction u est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A.
Dans ce cas, il est inutile de vérifier que toutes les fonctions $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$ sont intégrables sur I, ceci est assuré par l'hypothèse de domination.

Corollaire I.3.11 (Classe $\mathscr{C}^\infty$ - Version locale)**.**
Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f:(x,t)\mapsto f(x,t)$ une fonction de deux variables définie sur $A\times I$.
On suppose que :

- *pour tout $x\in A$, la fonction $t\mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur I ;*
- *pour tout $t\in I$, la fonction $x\mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A (les fonctions $(x,t)\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ sont donc bien définies pour $k\in\mathbb{N}^*$) ;*
- *pour tout $x\in A$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;*
- *pour tout segment $[a;b]$ inclus dans A, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, il existe une fonction $\varphi_{k,a,b}:t\mapsto\varphi_{k,a,b}(t)$ continue par morceaux et intégrable sur I telle que*
$$\forall (x,t)\in[a;b]\times I,\ \left|\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)\right|\leq\varphi_{k,a,b}(t).$$
Cette dernière hypothèse est appelée **hypothèse de domination locale**.

Alors :

- *la fonction $u:x\mapsto\int_I f(x,t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A ;*
- *pour tout $x\in A$, pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, la fonction $t\mapsto\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est intégrable sur I ;*
- *pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $u^{(k)}:x\longmapsto\int_I\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)dt$.*

II – Quelques exemples

1) Un grand classique : la fonction Γ

On définit la fonction Gamma par :

$$\boxed{\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt}.$$

(1) On a déjà montré plus tôt que le domaine de définition de Γ est $]0;+\infty[$.

(2) Montrer que Γ est continue sur $]0;+\infty[$.

(3) Montrer que Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0;+\infty[$ et exprimer ses dérivées à tout ordre.

(4) (a) Montrer que, pour tout $x>0$: $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ (relation fonctionnelle de Γ).

(b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\Gamma(n) = (n-1)!$ (résultat déjà obtenu dans le chapitre *Intégration*).

(5) (a) Montrer que Γ est convexe.

(b) En déduire les variations de Γ.

On utilisera l'égalité $\Gamma(1) = \Gamma(2)$. On ne cherchera pas à exprimer le minimum de Γ.

(c) Déterminer la limite de Γ en $+\infty$.

(d) En utilisant la relation fonctionnelle, déterminer un équivalent de Γ en 0 et donc la limite de Γ en 0.

2) L'intégrale de Gauss par les intégrales à paramètre

Dans cet exercice, on veut calculer la valeur de l'intégrale $\boxed{I = \int_0^{+\infty} \exp\left(-t^2\right)dt}$.

On considère les fonctions g et H définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \int_0^1 \frac{\exp(-(1+t^2)x^2)}{1+t^2}\,dt \quad \text{et} \quad H(x) = \int_0^x \exp\left(-t^2\right)dt.$$

(1) Justifier l'existence de l'intégrale I.

(2) (a) Montrer que H est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer H'.

(b) Montrer que g est bien définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Exprimer g'.

(c) Montrer que la fonction $g + H^2$ est constante sur $\mathbb{R}$ et calculer cette constante.

(d) Calculer la limite en $+\infty$ de g et en déduire la valeur de l'intégrale I.

(3) Calculer $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$. On utilisera un changement de variable bien choisi.