PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 08/12/2025 AU 12/12/2025

Intégrales à paramètre

(1) Domaine de définition. Fonction bien définie sur un intervalle.

(2) TCD à paramètre continu. Théorème de continuité (versions globale et locale).

(3) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^p$ (versions globale et locale). Le cas de la classe $\mathcal{C}^\infty$ a été utilisé sur l'exemple de Γ.

PAS D'EXERCICE SUR LES PRÉHILBERTIENS CETTE SEMAINE.

Produits scalaires - Espaces préhilbertiens

(1) Produits scalaire - Définition - Exemples

(2) Inégalité de Cauchy-Schwarz - Cas d'égalité - Définition de la norme euclidienne associée à un produit scalaire

(3) Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, sous-espaces vectoriels orthogonaux. Définition et propriétés.

(4) Familles orthogonales - Familles orthonormées - Bases orthonormées. Définitions et propriétés. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée.

Questions de cours (**deux questions** cette semaine) :

(1) **OBLIGATOIRE :** n'importe quel théorème sur les intégrales à paramètre (énoncé seulement).

(2) Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.

(3) Démontrer que $(A,B) \mapsto \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(4) Inégalité de Cauchy-Schwarz + cas d'égalité.

(5) Soit E un espace préhilbertien. Montrer que $N : x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur E.