Chapitre 9 - Espaces vectoriels normés

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I – Espaces vectoriels normés - Généralités

1) Normes - Distances

Définition I.1.1. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(1) On appelle norme sur E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :
- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*),
- $\forall x \in E,\ (N(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0_E)$ (*séparation*),
- $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

(2) Si N est une norme sur E, le couple (E, N) est appelé espace vectoriel normé.

En général, les normes se notent plutôt $\|.\|$.

(3) On appelle distance associée à la norme N l'application définie sur E^2 par :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ d(x, y) = N(y - x).$$

(4) On appelle vecteur unitaire ou vecteur normé tout vecteur de E de norme 1.

Proposition I.1.2. *(1) En utilisant l'homogénéité, on obtient $N(-x) = N(x)$ pour tout $x \in E$ mais aussi $N(0_E) = 0$.*
✍ *Inutile donc de vérifier que $N(0_E) = 0$ pour assurer la séparation.*

(2) ✌ *On peut démontrer l'inégalité triangulaire inversée :* $\forall (x, y) \in E^2,\ \big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|$.

Dans un triangle, la longueur d'un côté est comprise entre la somme et la différence des longueurs des deux autres.

Exemple I.1.3. Dans le chapitre précédent, on a vu qu'un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel normé.
Il suffit de le munir de la norme euclidienne associée au produit scalaire : $\forall x \in E,\ \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.
Dans ce contexte, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si x et y sont colinéaires de même sens. Dans le cas d'une norme quelconque, on n'a pas de tel résultat.

Exemple I.1.4. La valeur absolue est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$.
Le module est une norme sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$. Sauf mention du contraire, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront toujours muni de cette norme.

2) Exemples fondamentaux

Méthode. ✍ Pour montrer que $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé :
- on commence par s'assurer que E est bien un espace vectoriel ;
- on s'assure que l'application $\|.\|$ est bien définie (ce qui n'est pas toujours évident si elle est définie par une intégrale ou une borne supérieure !) et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$;
- il ne reste qu'à vérifier les trois axiomes de la définition.

Les normes présentées dans cette section sont usuelles et pourront être utilisées sans démonstration.

Lemme I.2.5. *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.*
On a l'existence des bornes supérieures suivantes et l'égalité :

$$\sup(\lambda A) = \sup\{\lambda x,\ x \in A\} = \lambda \sup(A).$$

Exemple I.2.6 (normes usuelles relativement à une base). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathscr{B}$. Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ et

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}; \qquad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k| \quad \left(= \max\left\{|x_k|,\ k \in [\![1;n]\!]\right\}\right).$$

Les applications $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ainsi définies sont des normes sur E.

Exemple I.2.7 (normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathbb{K}^n$. Pour tout $x \in E$, on note $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|; \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}; \qquad \|x\|_\infty = \max_{k \in [\![1;n]\!]} |x_k| \quad \left(= \max\left\{|x_k|,\ k \in [\![1;n]\!]\right\}\right).$$

Les applications $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ainsi définies sont des normes sur E.

Exemple I.2.8 (normes usuelles sur $\mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{K})$).
Soient a et b deux réels tels que $a < b$. On note $E = \mathscr{C}^0([a;b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des fonctions définies et continues sur le segment $[a;b]$. Pour tout $f \in E$, on note :

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(t)|\,dt; \qquad \|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\,dt}; \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t \in [a;b]} |f(t)| \quad \left(= \sup\left\{|f(t)|,\ t \in [a;b]\right\}\right).$$

Les applications $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ ainsi définies sont des normes sur E.

Exemple I.2.9. ✌ [Extension de $\|.\|_\infty$ à un espace de fonctions bornées]

- Soit X un ensemble non vide. On note $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des fonctions définies de X dans $\mathbb{K}$ et **bornées**.
  On rappelle que $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ est bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall t \in X,\ |f(t)| \leq M$.
  Pour tout f dans E, on note
  $$\|f\|_\infty = \sup_{t \in X} |f(t)| \quad \left(= \sup\left\{|f(t)|,\ t \in X\right\}\right).$$
  L'application $\|.\|_\infty$ ainsi définie est une norme sur l'espace $\mathscr{B}(X,\mathbb{K})$.
- Dans le cas particulier $X = \mathbb{N}$, on définit ainsi une norme (usuelle) sur l'espace $\ell_\infty(\mathbb{K})$ des suites bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$:
  $$\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| \quad \left(= \sup\{|u_n|,\ n \in \mathbb{N}\}\right).$$

Exercice I.2.10 (Résultats hors-programme). (1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment.
L'application $\|.\|_1 : f \longmapsto \int_I |f(t)|\,dt$ définit une norme sur l'espace $L^1_c(I,\mathbb{K})$ des fonctions **continues et intégrables sur** I.

(2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment.
L'application $\|.\|_2 : f \longmapsto \sqrt{\int_I |f(t)|^2\,dt}$ définit une norme sur l'espace $L^2_c(I,\mathbb{K})$ des fonctions **continues et de carré intégrable sur** I. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, c'est la norme euclidienne associée au produit scalaire défini par $\langle f, g\rangle = \int_I f(t)g(t)\,dt$.

3) Boules ouvertes - Boules fermées

Définition I.3.11. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$. Soit $R \in]0; +\infty[$.

(1) On appelle boule ouverte de centre a et de rayon R l'ensemble

$$B(a,R) = \{x \in E \mid \|x-a\| < R\} = \{x \in E \mid d(a,x) < R\}.$$

(2) On appelle boule fermée de centre a et de rayon R l'ensemble

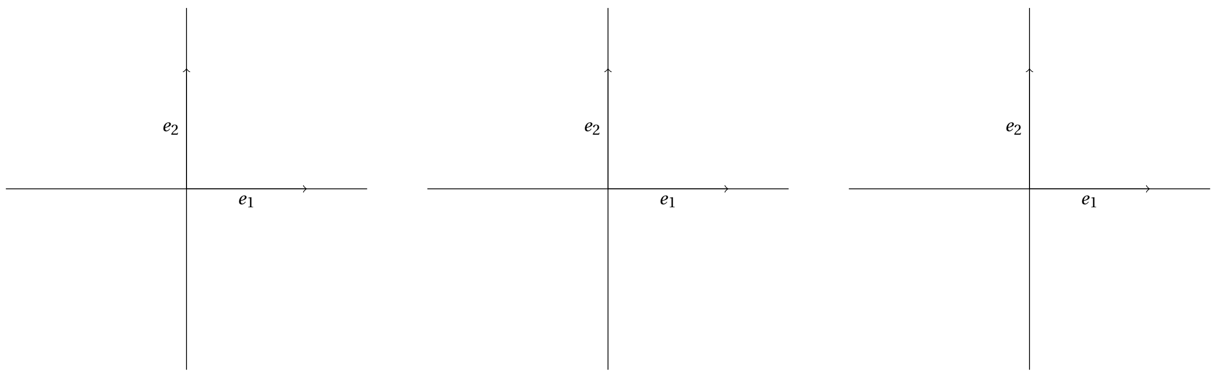
$$B_F(a,R) = \{x \in E \mid \|x-a\| \leq R\} = \{x \in E \mid d(a,x) \leq R\}.$$

(3) On appelle sphère de centre a et de rayon R l'ensemble

$$S(a,R) = B_F(a,R) \setminus B(a,R) = \{x \in E \mid \|x-a\| = R\} = \{x \in E \mid d(a,x) = R\}.$$

Exemple I.3.12. Dessiner $B_F(0_E, 1)$ (appelée *boule unité fermée*) dans $E = \mathbb{R}^2$ pour chacune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

La base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$ sera représentée par une base orthonormée comme ci-dessous.



4) Parties bornées - Fonctions bornées

Définition I.4.13. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
On dit que A est une partie bornée de E s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in A,\ \|x\| \leq M$.
Cette définition signifie que A est inclus dans une boule (ouverte ou fermée) de centre 0_E.

Exemple I.4.14.

(1) Si A est une partie bornée de E, alors toute partie de A est également une partie bornée de E.

(2) Les boules (ouvertes ou fermées) et les sphères sont des parties bornées d'un espace vectoriel normé.
On en déduit qu'une partie de E est bornée si et seulement si elle est incluse dans une boule (par forcément centrée en 0_E).

(3) La réunion d'un nombre fini de parties bornées de E est une partie bornée de E.

(4) N'importe quelle intersection de parties bornées de E est une partie bornée de E.

Exercice I.4.15. ⚠ Notons $E = \mathscr{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ et $A = \{f \in E \mid \int_0^1 |f(t)|dt \leq 1\}$.
Pour la norme $\|.\|_1$, A est une partie bornée (c'est même la boule unité fermée).
Pour la norme $\|.\|_\infty$, montrer que A n'est pas une partie bornée.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on construira une fonction f_n de A telle que $\|f_n\|_\infty = n$.

Définition - Théorème I.4.16. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit X un ensemble non vide.

(1) Soit f une application définie sur X et à valeurs dans E.
On dit que f est bornée (sur X) s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in X, \|f(x)\| \leq M$.
Cette définition signifie que $\mathrm{Im}(f)$ est une partie bornée de E.

(2) On note $\mathscr{B}(X, E)$ l'ensemble des applications $f : X \longrightarrow E$ bornées.
$\mathscr{B}(X, E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(X, E)$.

(3) Pour tout $f \in \mathscr{B}(X, E)$, on définit

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\| \ (= \sup\{\|f(x)\|,\ x \in X\}).$$

L'application $\|.\|_\infty$ ainsi définie est une norme sur $\mathscr{B}(X, E)$ appelée *norme infinie induite par* $\|.\|$.
On généralise ici une définition déjà donnée dans le cas particulier $E = \mathbb{K}$.

5) Parties convexes

Définition I.5.17. Soit E un espace vectoriel. Soit A une partie de E.
On dit que A est une partie convexe si :

$$\forall (a, b) \in A^2,\ \forall t \in [0; 1],\ (1 - t)a + tb \in A.$$

L'appartenance est immédiate si $t = 0$ ou $t = 1$.

Remarque. Comme dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{(1 - t)a + tb,\ t \in [0; 1]\} = \{a + t(b - a),\ t \in [0; 1]\}$ est appelé *segment joignant a et b* et peut se noter $[a; b]$. La définition s'interprète alors ainsi :
A est convexe si tout segment joignant deux éléments de A est inclus dans A.

Proposition I.5.18. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $a \in E$. Soit $R \in]0; +\infty[$.*

(1) La boule ouverte $B(a, R)$ est une partie convexe de E.

(2) La boule fermée $B_F(a, R)$ est une partie convexe de E.

6) Normes équivalentes

Définition I.6.19. Soit E un espace vectoriel. On note N_1 et N_2 deux normes définies sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe deux réels α et β strictement positifs tels que, pour tout $x \in E$:

$$N_1(x) \leq \alpha N_2(x) \qquad \text{et} \qquad N_2(x) \leq \beta N_1(x).$$

On voit tout de suite que N_1 et N_2 peuvent être échangées dans cette définition, on dit que la *relation d'équivalence est symétrique.*

Exemple I.6.20. Dans $\mathbb{K}^n$, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sont équivalentes.

Remarque. ✍ Dans la démonstration précédente, on n'a pas eu à démontrer 3 équivalences entre normes. En effet, si N_1 et N_2 sont équivalentes et N_2 et N_3 sont équivalentes, alors N_1 et N_3 sont équivalentes.
On dit que la *relation d'équivalence entre normes est transitive.*

Méthode. ✍ Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes, il suffit de montrer qu'une des deux applications $\dfrac{N_1}{N_2}$ ou $\dfrac{N_2}{N_1}$ n'est pas bornée sur $E \setminus \{0_E\}$.

Exemple I.6.21. Notons $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$, montrer qu'aucune des normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ n'est équivalente à une autre.
On pourra utiliser les fonctions $f_n : x \mapsto x^n$.

Théorème I.22. *Soit E un espace vectoriel. On note N_1 et N_2 deux normes sur E* **équivalentes**. *Soit A une partie de E.*
A est une partie bornée pour la norme N_1 si et seulement si A est une partie bornée pour la norme N_2.

Remarque. L'exercice I.4.15 démontre ainsi (à nouveau) que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$ définies sur $E = \mathscr{C}^0([0;1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.

II – Suites de vecteurs

1) Généralités - Suites bornées

Définition II.1.1. Soit E un espace vectoriel.

- On appelle suite d'éléments/de vecteurs de E tout application de $\mathbb{N}$ dans E. Si cette application est notée u, on écrira u_n à la place de $u(n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. La suite u se notera alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  On dit que u_n (qui est ici un vecteur de E) est le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- L'ensemble des suites d'éléments de E se note $\mathscr{F}(\mathbb{N}, E)$ ou $E^{\mathbb{N}}$. On peut y définir les opérations suivantes :
  — l'addition : on peut additionner deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour obtenir la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$;
  — la multiplication par un scalaire λ : on peut multiplier une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\lambda \in \mathbb{K}$ pour obtenir la suite $(\lambda u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- Plus généralement, on appelle suite de vecteurs de E toute application de $[\![n_0; +\infty[\![$ dans E où n_0 est un entier donné. On note alors $(u_n)_{n\geq n_0}$ une telle suite. Toutes les notions se généralisent à de telles suites.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par terme de rang n le vecteur u_n.
  On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété P à partir d'un certain rang s'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(u_n)_{n\geq n_0}$ vérifie la propriété P.

Remarque. ⚠ Comme pour les applications en général, on ne confondra pas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (qui ne dépend pas de n) et le vecteur u_n (qui dépend de n).

Exemple II.1.2. (1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3n-2}{2n+1} \\ \\ \dfrac{\sin(n)}{n} \end{pmatrix}$. On définit ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $M_n = \begin{pmatrix} \ln(n) & 2 \\ \dfrac{1}{n} & 3 \end{pmatrix}$. On définit ainsi la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

(3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f_n : x \mapsto nx^{n-1}$. On définit ainsi la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathscr{C}^0([0;1];\mathbb{R})$.

Définition II.1.3. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.

(1) On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (une suite) bornée s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \|u_n\| \leq M.$$

Ce n'est qu'un cas particulier de fonction bornée, notion déjà étudiée plus tôt dans ce chapitre.

(2) On note $\ell^\infty(E)$ l'espace vectoriel des suites bornées de vecteurs de E.

Proposition II.1.4. *Soit E un espace vectoriel. On note N_1 et N_2 deux normes définies sur E* **équivalentes**.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour la norme N_1 si et seulement si cette suite est bornée pour la norme N_2.

Exemple II.1.5. On reprend les exemples précédents (voir (II.1.2)).

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ pour chacune des trois normes usuelles $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

(2) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite bornée de vecteurs de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_\infty$ définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ \|M\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq 2} \left|(M)_{i,j}\right|.$$

(3) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite bornée de vecteurs de $\mathscr{C}^0([0;1];\mathbb{R})$ pour la norme $\|.\|_1$ mais pas pour les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.

Cet exemple montre (à nouveau) que les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ne sont pas équivalentes, tout comme les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_\infty$.

2) Convergence - Limite

Définition II.2.6. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge s'il existe $\ell \in E$ tel que

$$(\star)\ \ \forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq n_0) \Longrightarrow (\|u_n - \ell\| \leq \varepsilon).$$

S'il existe, un tel vecteur ℓ est unique et est appelé limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On le note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
On dit alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente (vers ℓ) ou que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente, on dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite divergente.

Exemple II.2.7. Les suites constantes sont convergentes et admettent pour limite leur unique valeur. On étend ce résultat aux suites stationnaires.

Remarque.

- Cette définition est la même que celle de la convergence des suites numériques, en remplaçant la valeur absolue (ou le module) par une norme puisqu'on mesure la distance entre deux vecteurs de E (u_n et ℓ) et pas la distance entre deux nombres.
  On va donc pouvoir généraliser un certain nombre de résultats en adaptant les démonstrations de première année, en remplaçant le module par la norme $\|.\|$ qui vérifie les mêmes propriétés : séparation, homogénéité, inégalité triangulaire.
- Cette définition est équivalente au fait que la suite **réelle positive** $\boxed{(\|u_n-\ell\|)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } 0}$. On pourra donc étudier l'éventuelle convergence de cette suite, par exemple en utilisant le théorème des gendarmes ou n'importe quel autre résultat sur les suites numériques vu en première année.

Théorème II.8. *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.*

(1) **Si** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in E$* **alors** *la suite réelle $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.*

(2) **Si** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente* **alors** *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.*

(3) On dit qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une <u>suite extraite</u> (ou une <u>sous-suite</u>) de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s'il existe une application $\varphi:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n=u_{\varphi(n)}$.
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell\in E$, alors toute suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

(4) Si les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite $\ell\in E$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge également vers ℓ.

(5) On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_1\in E$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E qui converge vers $\ell_2\in E$.
Soient λ_1 et λ_2 deux scalaires.
Alors la suite $(\lambda_1 u_n+\lambda_2 v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\lambda_1\ell_1+\lambda_2\ell_2$.

Exemple II.2.9. On reprend les exemples de (II.1.2).

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et calculer sa limite pour la norme $\|.\|_1$.

(2) Montrer que la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite divergente pour la norme $\|.\|_\infty$.

(3) Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite divergente pour les normes $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$.
Elle ne converge pas non plus pour la norme $\|.\|_1$ mais c'est un exercice plus délicat.

(4) Montrer que la suite $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle (notée $\tilde{0}$) pour les normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sur $\mathscr{C}^0([0;1];\mathbb{R})$.

Méthode. Pour montrer qu'une suite de vecteurs est divergente, on pourra :
— montrer qu'elle n'est pas bornée ;
— montrer qu'elle admet une suite extraite divergente ;
— montrer qu'elle admet deux suites extraites convergentes dont les limites sont différentes.

Théorème II.10. *Soit E un espace vectoriel. On note N_1 et N_2 deux normes définies sur E* **équivalentes**.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente pour la norme N_1 si et seulement si elle est convergente pour la norme N_2.
En cas de convergence, la limite est la même pour les deux normes.

Exemple II.2.11.

(1) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de l'exemple (II.1.2) converge pour les trois normes usuelles et donner sa limite.

(2) Montrer que la suite $(x\mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers la fonction nulle (notée $\tilde{0}$) pour la norme $\|.\|_\infty$ sur $\mathscr{C}^0([0;1];\mathbb{R})$.
Cet exemple montre (à nouveau!) que la norme $\|.\|_\infty$ n'est pas équivalente aux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$.

III – Éléments de topologie

1) Ouverts

Définition III.1.1. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

(1) Soit $a \in A$. On dit que a est (un point) intérieur à A s'il existe $R > 0$ tel que $B(a, R) \subset A$.

(2) On dit que A est un ouvert (ou une partie ouverte) de E si tous les points de A sont intérieurs à A, autrement dit :

$$\forall a \in A,\ \exists R > 0,\ B(a, R) \subset A.$$

Exemple III.1.2.
- $\varnothing$ et E sont des ouverts.
- Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, les intervalles de la forme $]a; b[$ sont des ouverts.

Proposition III.1.3. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.*

(1) Une boule ouverte est un ouvert de E.

(2) Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) de parties ouvertes de E. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est un ouvert de E.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille **finie** *de parties ouvertes de E. Alors $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ est un ouvert de E.*

Exemple III.1.4. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, les intervalles $A_n = \left]\frac{-1}{n}; \frac{1}{n}\right[$ sont des ouverts pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Que vaut l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$? Est-ce un ouvert ?

2) Fermés

Définition III.2.5. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
On dit que A est un fermé (ou une partie fermée) de E si le complémentaire A^c de A dans E est un ouvert de E.

On déduit de cette définition que le complémentaire d'un ouvert est un fermé !

Exemple III.2.6.

- $\varnothing$ et E sont des fermés.

  Contrairement au langage courant, une partie de E peut être ouverte ET fermée. Un terme n'est pas le contraire de l'autre.
- Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, les segments (intervalles de la forme $[a;b]$) sont des fermés, tout comme les intervalles de la forme $[a;+\infty[$ et $]-\infty;b]$.
- Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, l'intervalle $[0;1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

Proposition III.2.7. *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.*

(1) *Une boule fermée est un fermé de E.*

(2) *Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille (quelconque) de parties fermées de E. Alors $\bigcap_{i\in I} A_i$ est un fermé de E.*

(3) *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(A_i)_{1\le i\le n}$ une famille* **finie** *de parties fermées de E. Alors $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est un fermé de E.*

(4) *Une sphère est un fermé de E.*

Exemple III.2.8. Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, les intervalles $I_n = \left[\frac{1}{n}; 3 - \frac{1}{n}\right]$ sont des fermés pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Que vaut la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$? Est-ce un fermé ?

Proposition III.2.9 (Caractérisation séquentielle)**.** *Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.*
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) *A est une partie fermée de E ;*

(2) *pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente d'éléments de A, la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à A.*

Exemple III.2.10.

(1) Toute partie **finie** est un fermé de $(E, \|.\|)$. Par exemple un singleton est fermé.

(2) Redémontrer que $[0;1[$ n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

3) Adhérence - Partie dense

Définition III.3.11. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.

(1) Soit $x \in E$. On dit que x est (un point) adhérent à A si, pour tout $R > 0$, la boule ouverte $B(x,R)$ intersecte A :

$$\forall R > 0,\ B(x,R) \cap A \neq \varnothing.$$

(2) On appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A :

$$\overline{A} = \{x \in E \mid \forall R > 0,\ B(x,R) \cap A \neq \varnothing\}.$$

Exemple III.3.12.

(1) $\overline{E} = E$ et $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

(2) Tout point de A est adhérent à A. Autrement dit : $A \subset \overline{A}$.

(3) Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, quelle est l'adhérence de $]-1;2]$?

Théorème III.13 (Caractérisation séquentielle de l'adhérence)**.**
Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E. Soit $x \in E$.

(1) x est (un point) adhérent à A si et seulement s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers x.

(2) L'adhérence de A est l'ensemble des limites des suites convergentes d'éléments de A.

Exemple III.3.14. En utilisant la caractérisation séquentielle, montrer à nouveau que $\overline{]-1;2]} = [-1;2]$.

Définition III.3.15. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit A une partie de E.
On dit que A est dense dans E (ou une partie dense de E) si $\overline{A} = E$, autrement dit
si tout élément de E est limite d'une suite convergente d'éléments de A.

Exemple III.3.16. L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$ (pour la norme $|.|$).
L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ des nombres irrationnels est également dense dans $\mathbb{R}$.
On en déduit que, pour tous réels $a < b$, l'intervalle $]a;b[$ contient un rationnel et un irrationnel (une infinité en fait ...).

4) Invariance par passage à une norme équivalente

Toutes les définitions données précédemment dépendent du choix de la norme $\|.\|$. Le résultat suivant montre que ces caractéristiques sont conservées si on remplace cette norme par une norme qui lui est équivalente.

Théorème III.17. *Soit E un espace vectoriel. On note N_1 et N_2 deux normes définies sur E* **équivalentes**.
Soit A une partie de E.

(1) Un élément a de A est intérieur à A pour la norme N_1 si et seulement si a est intérieur à A pour la norme N_2.

(2) A est un ouvert pour la norme N_1 si et seulement si A est un ouvert pour la norme N_2.

(3) A est un fermé pour la norme N_1 si et seulement si A est un fermé pour la norme N_2.

(4) Un élément x de E est adhérent à A pour la norme N_1 si et seulement si x est adhérent à A pour la norme N_2.

(5) L'adhérence de A pour la norme N_1 est égale à l'adhérence de A pour la norme N_2.

(6) A est dense dans E pour la norme N_1 si et seulement si A est dense dans E pour la norme N_2.

IV – Limite et continuité d'une fonction

1) Limite - Continuité ponctuelle

Définition IV.1.1. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit D une partie de E.
Soit $f : D \longrightarrow F$ une application de D dans F. Soit a un point de E adhérent à D. Soit $\ell \in F$.
On dit que f admet ℓ pour limite en a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ \|x - a\|_E \leq \eta \Longrightarrow \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On dit aussi que f tend vers ℓ en a ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a.

Remarque. ⚠ Cette définition n'a de sens (et d'intérêt) que si a est adhérent à D.
En effet, dans le cas contraire, on pourrait trouver un réel η tel qu'aucun élément x de D ne vérifie $\|x - a\|_E \leq \eta$...
C'est comme si on cherchait à calculer la limite de la fonction ln en $a = -2$. Le réel -2 n'est pas dans l'adhérence de $]0; +\infty[$!

Proposition IV.1.2 (Unicité de la limite)**.**
On reprend les notations de la définition précédente. Soient ℓ et ℓ' deux éléments de F.
On suppose que f admet ℓ et ℓ' pour limite en a. Alors on a $\ell = \ell'$.
On dit alors que ℓ est **la** *limite de f en a. On note $\lim_{a} f = \ell$ ou $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell$.*

Remarque. (1) La définition précédente est **la même** que pour la limite finie d'une fonction réelle (vue en première année), en remplaçant la valeur absolue par une norme : la norme de E pour mesurer la distance entre x et a, celle de F pour mesurer la distance entre $f(x)$ et ℓ.

(2) ✌ Pour montrer qu'une application f possède ℓ pour limite en a, on peut montrer que $\boxed{\lim_{x\to a} \|f(x)-\ell\|_F = 0}$, par exemple en montrant que $\|f(x)-\ell\|_F \leq g(x)$ pour tout $x \in D$ où g est une fonction à valeurs réelles telle que $\lim_{x\to a} g(x) = 0$.
Si f est à valeurs **réelles**, on peut même trouver deux fonctions u et v à valeurs réelles telles que

$$\lim_{x\to a} u(x) = \lim_{x\to a} v(x) = \ell \quad \text{et} \quad \forall x \in D,\ u(x) \leq f(x) \leq v(x).$$

Exemple IV.1.3. On reprend les notations de la définition précédente.

(1) Soit $a \in E$. On a $\lim_{x\to a} \|x-a\|_E = 0$ c'est-à-dire $\lim_{x\to a} x = a$ (limite de la fonction $\mathrm{Id}_E : E \longrightarrow E$).

(2) Soit $b \in F$ un vecteur fixé de F. Notons $f : x \mapsto b$, fonction constante de E dans F.
Pour tout $a \in E$, on a alors $\lim_{x\to a} f(x) = b$ (limite d'une fonction constante). On peut écrire $\lim_{x\to a} b = b$.

Remarque. (1) On remarque que la limite d'une fonction est un élément de F. On ne peut généraliser la notion de *limite infinie* que dans le cas particulier $\underline{F = \mathbb{R}}$! Dans ce cas, on peut par exemple écrire que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ si :

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in D,\ \|x-a\|_E \leq \eta \Longrightarrow f(x) \geq A.$$

On a alors les mêmes résultats et techniques que pour les fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

(2) On pourrait également généraliser la notion de *limite de f en $\pm\infty$* mais seulement si $\underline{E = \mathbb{R}}$!

Définition - Théorème IV.1.4. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit D une partie de E.
Soit $f : D \longrightarrow F$ une application de D dans F. Soit a un point de E adhérent à D.

- Supposons que $a \in D$ (f est définie en a).
  On dit que $\underline{f \text{ est continue en } a}$ si f admet une limite $\ell \in F$ en a. On a alors $\ell = f(a)$.
  On en déduit que f est continue en a si et seulement si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.
- Supposons que $a \notin D$ et $a \in \overline{D}$. Si f admet une limite $\ell \in F$ en a, on dit que f est $\underline{\text{prolongeable par continuité en } a}$.
  En effet, la fonction $x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \neq a \\ \ell & \text{si} \quad x = a \end{cases}$ est définie sur $D \cup \{a\}$ et est continue en a.
  Si on note encore f cette fonction, on dit qu'on *prolonge f par continuité en a en posant $f(a) = \ell$.*

Exemple IV.1.5. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé.

(1) Les fonctions constantes sont continues en tout point de E.

(2) L'application $\mathrm{Id}_E : x \mapsto x$ (de $(E, \|.\|)$ dans lui-même) est continue en tout point de E.

(3) L'application $\|.\|$, définie de $(E, \|.\|)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ est continue en tout point de E.

Proposition IV.1.6. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit D une partie de E.*
Soit $f : D \longrightarrow F$ une application de D dans F. Soit a un point de E adhérent à D.
Si f admet une limite $\ell \in F$ en a (en particulier si f est continue en a) alors f est bornée au voisinage de a, c'est-à-dire :

$$\exists h > 0,\ \exists M \in \mathbb{R}_+,\ \forall x \in D,\ \|x - a\|_E \leq h \Longrightarrow \|f(x)\|_F \leq M.$$

Théorème IV.7 (Caractérisation séquentielle)**.**
Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit D une partie de E.
Soit $f : D \longrightarrow F$ une application de D dans F. Soit a un point de E adhérent à D.

(1) Soit $\ell \in F$.
$\lim\limits_a f = \ell$ si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.

(2) Supposons que $a \in D$.
f est continue en a si et seulement si, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de D qui converge vers a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$.

Le fait que a soit adhérent à D entraîne l'existence de telles suites. Sinon ces énoncés n'auraient aucun intérêt!

Théorème IV.8 (Opérations sur les limites/Théorèmes généraux)**.**
Soient $(E, \|.\|_E)$, $(F, \|.\|_F)$ et $(G, \|.\|_G)$ trois espaces vectoriels normés.

(1) Soit D une partie de E. Soient f et g deux applications de D dans F. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Soit $(\ell_1, \ell_2) \in F^2$.
Soit a un point de E adhérent à D.
Si f admet ℓ_1 pour limite en a et g admet ℓ_2 pour limite en a, alors $\lambda_1 f + \lambda_2 g$ admet $\lambda_1\ell_1 + \lambda_2\ell_2$ pour limite en a.

(2) Soient D_f une partie de E et D_g une partie de F.
Soit $f : D_f \longrightarrow F$ et $g : D_g \longrightarrow G$ deux applications telles que $f(D_f) \subset D_g$. Soit a un point de E adhérent à D_f.
Si f admet $b \in F$ pour limite en a et si g admet $\ell \in G$ pour limite en b, alors $g \circ f$ admet ℓ pour limite en a.

(3) Si les fonctions sont <u>à valeurs dans $\mathbb{K}$</u>, on généralise également les théorèmes généraux vus en première année pour le produit et le quotient de limites.
Dans le cas de fonctions à valeurs <u>réelles</u>, on peut même généraliser les définitions et théorèmes relatifs aux limites infinies.

2) <u>Continuité sur une partie</u>

Définition IV.2.9. Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit D une partie de E.
Soit $f : D \longrightarrow F$ une application de D dans F.

- On dit que que <u>f est continue sur D</u> si f est continue en tout point de D.
- Si D' est une partie de D, on dit que <u>f est continue sur D'</u> si la restriction de f à D' est continue en tout point de D' (si $D' = D$, on a $f_{|D} = f$ et on retrouve la définition du point précédent).
- On note $\mathscr{C}^0(D, F)$ l'ensemble des applications de D dans F continues sur D.

Exemple IV.2.10. Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ définies de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème IV.11 (Opérations entre applications continues/Théorèmes généraux)**.**
Soient $(E,\|.\|_E)$, $(F,\|.\|_F)$ et $(G,\|.\|_G)$ trois espaces vectoriels normés.

(1) *Soit D une partie de E. Soient f et g deux applications de D dans F. Soit $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{K}^2$.*
Si f et g sont continues sur D, alors $\lambda_1 f+\lambda_2 g$ est continue sur D.

(2) *Soient D_f une partie de E et D_g une partie de F.*
Soient $f : D_f \longrightarrow F$ et $g : D_g \longrightarrow G$ deux applications telles que $f(D_f)\subset D_g$.
Si f est continue sur D_f et g est continue sur D_g, alors $g\circ f$ est continue sur D_f.

(3) *Si les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{K}$, on généralise aussi les résultats sur la continuité du produit et du quotient.*

Exemple IV.2.12. *Par opérations* ou *D'après les théorèmes généraux*, on peut déduire de l'exemple précédent que les fonctions $(x,y)\mapsto x^2+3xy$, $(x,y)\mapsto \dfrac{y}{x^2+y^4+1}$ et $(x,y)\mapsto \sin(xy)+3\,\mathrm{e}^{x+y^2}$ définies de $(\mathbb{R}^2,\|.\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R},|.|)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice IV.2.13. Soit E un espace préhilbertien (normé par la norme euclidienne associée au produit scalaire).
Soient f et g deux fonctions de $I\subset\mathbb{R}$ dans E continues sur I ($\mathbb{R}$ est naturellement muni de la valeur absolue).
En utilisant une identité de polarisation, démontrer que la fonction $\varphi : t\mapsto \langle f(t), g(t)\rangle$ est continue sur I.

Remarque. En utilisant la caractérisation séquentielle de la continuité et les résultats des parties précédentes (en particulier (II.10)), on obtient que toutes **les notions relatives à la continuité d'une application sont inchangées si on remplace une des normes ($\|.\|_E$ ou $\|.\|_F$) par une norme équivalente**.

Théorème IV.14. *Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E\longrightarrow F$ une application continue sur E.*

(1) *Si B est un fermé de F, alors $f^{-1}(B)$ est un fermé de E.*

(2) *Si B est un ouvert de F, alors $f^{-1}(B)$ est un ouvert de E.*

Exemple IV.2.15.
L'image (directe !) de l'ouvert $]-2;2[$ par la fonction continue $x\mapsto x^2$ est $[0;4[$ qui n'est pas un ouvert.
L'image (directe !) du fermé $\mathbb{R}$ par la fonction continue arctan est $\left]\dfrac{-\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ qui n'est pas un fermé.

Exercice IV.2.16. Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé.

(1) Montrer que l'ensemble $\{x\in E \mid 1\le\|x\|\le 2\}$ est un fermé de E.

(2) Retrouver qu'une boule ouverte est un ouvert ; qu'une boule fermée est un fermé.

Corollaire IV.2.17. *Soit $(E,\|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $f : E\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction continue sur E.*

(1) *$\{x\in E \mid f(x)>0\}$ est un ouvert de E ;*

(2) *$\{x\in E \mid f(x)=0\}$ et $\{x\in E \mid f(x)\ge 0\}$ sont des fermés de E.*

Définition IV.2.18. Soient $(E,\|.\|_E)$ et $(F,\|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit D une partie de E. Soit $f : D\longrightarrow F$.
On dit que f est lipschitzienne (sur D) s'il existe $k\in\mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x,y)\in D^2,\ \|f(y)-f(x)\|_F \le k\|y-x\|_E.$$

On dit alors que f est k-lipschitzienne (sur D) ou que f est lipschitzienne de rapport k (sur D).

Remarque. En utilisant l'inégalité des accroissements finis, on a montré en première année que si f est une fonction réelle dérivable sur un intervalle I et si $|f'| \leq k$, alors f est k-lipschitzienne sur I.
Par exemple cos et sin sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$
mais elle l'est sur $[0;1]$ par exemple.

Exemple IV.2.19. Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. L'application $\|.\|$, définie de $(E, \|.\|)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$ est 1-lipschitzienne.

Théorème IV.20. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit $f : E \longrightarrow F$. Soit D une partie de E.*
Si *f est lipschitzienne sur D* **alors** *f est continue sur D.*

Exemple IV.2.21. On retrouve la continuité sur E des applications constantes,
de l'application Id_E (de $(E, \|.\|)$ dans lui-même) et de l'application $\|.\|$ (de $(E, \|.\|)$ dans $(\mathbb{R}, |.|)$).

V – Cas particulier des espaces vectoriels normés de dimension finie

1) Équivalence des normes

Théorème V.1 (ADMIS)**.** *Soit E un espace vectoriel* **de dimension finie**. *Toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Remarque. Cet énoncé permet de reformuler de nombreux résultats énoncés précédemment sans mentionner la (les) norme(s) utilisée(s) :

- La suite $\left(\begin{pmatrix} \dfrac{3n-2}{2n+1} \\ \\ \dfrac{\sin(n)}{n} \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de $\mathbb{R}^2$. De plus cette suite converge vers $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.
- La suite de matrices $\left(\begin{pmatrix} \ln(n) & 2 \\ \dfrac{1}{n} & 3 \end{pmatrix}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas une suite bornée.
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
- $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
- Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n muni d'une base $\mathscr{B}$. Pour tout $x \in E$,

  on note $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$. Pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, l'application $\begin{array}{rcl} E & \to & \mathbb{K} \\ x & \mapsto & x_i \end{array}$ est continue sur E.

  Par exemple, les applications $z \mapsto \mathrm{Re}(z)$ et $z \mapsto \mathrm{Im}(z)$ sont continues sur $\mathbb{C}$.
- On appelle <u>fonction polynomiale à n variables</u> toute combinaison linéaire de fonctions de la forme :

  $$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \end{array},$$

  où α_1, ..., α_n sont des entiers naturels. Par exemple $(x, y, z) \mapsto 2x^2y^3 + 4xyz - yz^5$ est polynomiale à 3 variables.
  Les fonctions polynomiales sont des fonctions continues sur $\mathbb{K}^n$ (par opérations).
- $(x, y) \mapsto \sin(xy) + 3\,\mathrm{e}^{x+y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Définition V.1.2. Soit F un espace vectoriel **de dimension finie**. Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leq k\leq p}$ une base de F.

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $(u_n^1, \dots, u_n^p)$ les coordonnées de u_n dans $\mathscr{B}$. On définit ainsi p suites $(u_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$, ..., $(u_n^p)_{n\in\mathbb{N}}$ appelées suites coordonnées de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la base $\mathscr{B}$.
Les suites coordonnées sont des suites numériques (à valeurs dans $\mathbb{K}$).

(2) Soit E un espace vectoriel. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application de E dans F.
Pour tout $x \in E$, notons $(f_1(x), \dots, f_p(x))$ les coordonnées de $f(x)$ dans $\mathscr{B}$. On définit ainsi p fonctions f_1, ..., f_p appelées fonctions coordonnées de f dans la base $\mathscr{B}$.
Les fonctions coordonnées sont des fonctions à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Théorème V.3. *Soit $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé* **de dimension finie**. *Soit $\mathscr{B} = (e_k)_{1\leq k\leq p}$ une base de F.*

(1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si et seulement si ses suites coordonnées dans $\mathscr{B}$ sont convergentes. Dans ce cas, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \sum_{k=1}^{p} \left(\lim_{n\to+\infty} u_n^k\right) e_k.$$

(2) Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé. Soit D une partie de E. Soit $f : D \longrightarrow F$. Soit a un point adhérent à D.
L'application f possède une limite $\ell \in F$ en a si et seulement si ses fonctions coordonnées possèdent chacune une limite finie en a. On a alors :

$$\ell = \lim_{x\to a} f(x) = \sum_{k=1}^{p} \left(\lim_{x\to a} f_k(x)\right) e_k.$$

(3) Avec les notations du point précédent, f est continue en a (respectivement sur D) si et seulement si ses fonctions coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ sont continues en a (respectivement sur D).

Exemple V.1.4.

(1) L'application $(x, y) \mapsto (2x+3y, x-4y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions coordonnées sont polynomiales (à deux variables).

(2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n = \dfrac{\sin(n)}{n} X^3 + \dfrac{n+1}{n+2} X^2 + X - \ln(n+1)\,\mathrm{e}^{-n}$.
Montrer que la suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

(3) Notons $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer que la suite de matrices $(D^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et calculer sa limite.

(4) Justifier que l'application $(r, \theta) \longmapsto (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème V.5 (ADMIS - Théorème des bornes atteintes)**.**
Soit $(E, \|.\|_E)$ un espace vectoriel normé **de dimension finie**. *Soit C une partie* **non vide, fermée et bornée** *de E.*
Si f est une fonction définie et **continue** *sur C et* **à valeurs réelles**, *alors f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit :*
il existe $a \in C$ et $b \in C$ tels que $f(a) = \inf\limits_{x\in C} f(x)$ et $f(b) = \sup\limits_{x\in C} f(x)$. *En fait : $f(a) = \min\limits_{x\in C} f(x)$ et $f(b) = \max\limits_{x\in C} f(x)$.*

Remarque. Ce théorème généralise le résultat de première année sur l'image d'un segment par une fonction continue à valeurs réelles.

2) Continuité des applications linéaires et multilinéaires

Lemme V.2.6. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit f une application* **linéaire** *de E dans F. Soit $k \in \mathbb{R}_+$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) f est k-lipschitzienne : $\forall x \in E,\ \forall y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$;

(2) pour tout $x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.

Théorème V.7. *Soient $(E, \|.\|_E)$ et $(F, \|.\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. On suppose que E est de* **dimension finie**. *Soit f une application* **linéaire** *de E dans F. Alors f est lipschitzienne donc continue sur E.*

Exemple V.2.8. On retrouve par exemple que $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto (2x + 3y, x - 4y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple V.2.9. Si E n'est pas de dimension finie, il n'y aucune raison qu'une application linéaire soit continue. Considérons par exemple $E = \mathscr{C}^1([0; 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ et la forme linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall u \in E,\ f(u) = u'(0).$$

En considérant les fonctions $v_n : t \longmapsto \dfrac{\sin((n+1)t)}{n+1}$, montrer que f n'est pas continue en $\tilde{0}$ (la fonction nulle).

Exercice V.2.10 (Norme subordonnée - Exercice classique).

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie non nulle. On note $S = \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$.

(1) Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.

(a) Montrer que l'ensemble $\{\|f(x)\|,\ x \in S\}$ possède une borne supérieure et qu'il existe $x_0 \in S$ tel que $\|f(x_0)\| = \sup\limits_{x \in S} \|f(x)\|$. Dans la suite, on notera $|||f||| = \sup\limits_{x \in S} \|f(x)\|$.

(b) Montrer que f est $|||f|||$-lipschitzienne, c'est-à-dire : $\forall x \in E,\ \|f(x)\| \leq |||f|||.\|x\|$.

(2) La question précédente permet de définir l'application $\begin{array}{rccc} |||.||| : & \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & f & \longmapsto & |||f||| \end{array}$.

(a) Montrer que $|||.|||$ est une norme sur E. On l'appelle *norme subordonnée à* $\|.\|$.

(b) Démontrer que, pour tous f et g dans $\mathscr{L}(E)$: $|||f \circ g||| \leq |||f|||.|||g|||$.

Définition V.2.11. Supposons $n \geq 2$. Soient n espaces vectoriels notés E_1, ..., E_n. Soit F un espace vectoriel.
Soit f une application de $E = E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F.
On dit que f est linéaire par rapport à chacune de ses variables ou n-linéaire si,
pour tout $j \in [\![1;n]\!]$, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et toutes familles de vecteurs $\left(u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots, u_n\right) \in E$ et $\left(u_1, u_2, \ldots, u'_j, \ldots, u_n\right) \in E$:

$$f\left(u_1, u_2, \ldots, \lambda u_j + u'_j, \ldots, u_n\right) = \lambda f\left(u_1, u_2, \ldots, u_j, \ldots, u_n\right) + f\left(u_1, u_2, \ldots, u'_j, \ldots, u_n\right).$$

Exemple V.2.12. Dans cette définition, il faut comprendre que f est linéaire comme fonction d'une variable, toutes les autres étant considérées fixées. On peut donner quelques exemples :

- Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathscr{B}$.
  L'application $\det_{\mathscr{B}}$ de E^n dans $\mathbb{K}$ (déterminant d'une famille de n vecteurs de E dans la base $\mathscr{B}$) est n-linéaire ;
- le produit scalaire $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ d'un espace préhilbertien E est une application bilinéaire définie sur $E \times E$;
- l'application $(A, B) \mapsto AB$ (produit matriciel dans $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est une application bilinéaire définie sur E^2 ;
- l'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est une application bilinéaire définie sur $\mathbb{K} \times E$ à valeurs dans un espace vectoriel E.

Théorème V.13.
Supposons $n \geq 2$. Soient n espaces vectoriels normés notés $(E_1, \|.\|_{E_1})$, ..., $(E_n, \|.\|_{E_n})$, **tous de dimension finie**.
Soit $(F, \|.\|_F)$ un espace vectoriel normé.

(1) Si f est une application n-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n,\ \|f(x_1, \ldots, x_n)\|_F \leq k \|x_1\|_{E_1} \times \cdots \times \|x_n\|_{E_n}.$$

(2) Toute application n-linéaire de $E_1 \times \cdots \times E_n$ dans F est continue sur $E_1 \times \cdots \times E_n$.

Exemple V.2.14.

(1) Soit E un espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathscr{B}$. L'application $\det_{\mathscr{B}}$ est continue sur E^n.

(2) Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace euclidien. L'application $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$ est continue sur E^2.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. L'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue sur E^2.

(4) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. L'application $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ est continue sur $\mathbb{K} \times E$.

Proposition V.2.15. *Soient p, q et r trois entiers naturels non nuls.*

(1) Soit $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. L'application $M \mapsto AM$ est une application linéaire sur $\mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ de dimension finie donc continue.

(2) Soit $B \in \mathscr{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. L'application $M \mapsto MB$ est une application linéaire sur $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ de dimension finie donc continue.

Exercice V.2.16. Notons $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Soit $P \in GL_3(\mathbb{R})$. On note $M = PDP^{-1}$. Démontrer que la suite de matrices $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Proposition V.2.17. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'application $M \longmapsto \det(M)$ est continue sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.*

Exercice V.2.18. Soit $p \geq 2$. On note $E = \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Démontrer que $GL_p(\mathbb{R})$ est un ouvert dense de E.