PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 15/12/2025 AU 19/12/2025

Intégrales à paramètre

Programme de la semaine dernière.

Produits scalaires - Espaces préhilbertiens

(1) Produits scalaire - Définition - Exemples

(2) Inégalité de Cauchy-Schwarz - Cas d'égalité - Définition de la norme euclidienne associée à un produit scalaire

(3) Orthogonalité : vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie, sous-espaces vectoriels orthogonaux. Définition et propriétés.

(4) Familles orthogonales - Familles orthonormées - Bases orthonormées. Définitions et propriétés. Expression des coordonnées, du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormée. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(5) Théorème de représentation de Riesz.

(6) Projection orthogonale : unicité du supplémentaire orthogonal et définition de la projection orthogonale si $E = F \oplus F^{\perp}$. Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$ (et $(F^{\perp})^{\perp} = F$). Expression du projeté orthogonal dans une bon de F.

(7) Distance à un sous-espace F : définition, lien avec le projeté orthogonal si F est de dimension finie, formules.

(8) Hyperplans d'un espace euclidien. Un vecteur normal à H est un vecteur non nul de $H^{\perp}$. Utilisation d'une forme linéaire pour reconnaître un hyperplan et un vecteur normal. Lien avec une équation de H dans une bon de E. Projeté orthogonal sur un hyperplan et distance à un hyperplan.

Questions de cours :

(1) Démontrer que $(f,g) \mapsto \langle f,g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([0;1],\mathbb{R})$.

(2) Démontrer que $(A,B) \mapsto \langle A,B\rangle = \mathrm{tr}(A^T B)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(3) Inégalité de Cauchy-Schwarz + cas d'égalité.

(4) Soit E un espace préhilbertien. Montrer que $N : x \mapsto \sqrt{\langle x,x\rangle}$ est une norme sur E.

(5) Si F est de dimension finie, alors $E = F \oplus F^{\perp}$. Expression du projeté orthogonal dans une bon de F.