Théorème .1. *Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés de dimension finie.*
Soit F un espace vectoriel normé.

(1) *Si u est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :*

$$\forall (x,y) \in E_1 \times E_2,\ \|u(x,y)\|_F \leq k\|x\|_{E_1} \times \|y\|_{E_2}.$$

(2) *Toute application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F est continue sur $E_1 \times E_2$.*

Ce résultat s'énonce et se démontrerait de manière analogue dans le cas d'une application n-linéaire sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimension finie.

Démonstration. (1) Soit u une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.

On note $n_1 = \dim(E_1)$, $n_2 = \dim(E_2)$ et on munit respectivement E_1 et E_2 de bases $\mathscr{B}_1 = (e_1, \dots, e_{n_1})$ et $\mathscr{B}_2 = (f_1, \dots, f_{n_2})$.
Pour tout $i \in \{1,2\}$, on note N_i la norme infinie sur E_i relativement à la base $\mathscr{B}_i$:
par exemple, si $x = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i \in E_1$, on a $N_1(x) = \max_{1 \leq i \leq n_1} |x_i|$.
Soient $x = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i \in E_1$ et $y = \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j \in E_2$.

$$\begin{aligned}
\|u(x,y)\|_F &= \left\| u\left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j \right) \right\|_F \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} x_i y_j u\left(e_i, f_j\right) \right\|_F \qquad \text{(bilinéarité de } u\text{)} \\
&\overset{i.t.}{\leq} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |x_i||y_j| \underbrace{\|u\left(e_i, f_j\right)\|_F}_{\geq 0} \\
&\overset{i.t.}{\leq} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} N_1(x) N_2(y) \|u\left(e_i, f_j\right)\|_F \\
&\leq N_1(x) N_2(y) \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|u\left(e_i, f_j\right)\|_F}_{=k'} = k' N_1(x) N_2(y).
\end{aligned}$$

Pour conclure, E_1 et E_2 sont de dimension finie donc $\|.\|_{E_1}$ et N_1 sont équivalentes et $\|.\|_{E_2}$ et N_2 sont équivalentes.
Il existe donc des réels strictement positifs α_1 et α_2 tels que $N_1 \leq \alpha_1 \|.\|_{E_1}$ et $N_2 \leq \alpha_2 \|.\|_{E_2}$. On conclut alors que :

$$\|u(x,y\|_F \leq k' N_1(x) N_2(y) \leq \underbrace{k' \alpha_1 \alpha_2}_{=k} \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2} = k\|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2},$$

ce qu'on voulait.

(2) Soit u une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F.
$E_1 \times E_2$ est de dimension finie donc toutes les normes sur $E_1 \times E_2$ sont équivalentes. Munissons cet espace vectoriel d'une norme notée N.

Montrons la continuité de u de $(E_1 \times E_2, N)$ dans $(F, \|.\|_F)$. Soit $(a,b) \in E_1 \times E_2$. Montrons que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = u(a,b)$. Soit $(x,y) \in E_1 \times E_2$.

$$\begin{aligned}\|u(x,y)-u(a,b)\|_F &= \|u(x,y-b)+u(x-a,b)\|_F \\ &\overset{i.t.}{\leq} \|u(x,y-b)\|_F + \|u(x-a,b)\|_F \\ &\overset{(1)}{\leq} k \underbrace{\|x\|_{E_1}}_{\underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow}\|a\|} \underbrace{\|y-b\|_{E_2}}_{\underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow}0} + k \underbrace{\|x-a\|_{E_1}}_{\underset{(x,y)\to(a,b)}{\longrightarrow}0} \underbrace{\|b\|_{E_2}}_{=cte}\end{aligned}$$

car les applications $(x,y) \mapsto x$ de $E_1 \times E_2$ dans E_1 et $(x,y) \mapsto y$ de $E_1 \times E_2$ dans E_2 sont linéaires sur un espace de dimension finie donc sont continues et les applications $\|.\|_{E_i}$ sont continues sur E_i (car 1-lipschitzienne). Par opérations et par le théorème des gendarmes, on déduit de la majoration ci-dessus que $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} u(x,y) = u(a,b)$ et donc que $\boxed{u \text{ est continue en } (a,b) \text{ et donc sur } E_1 \times E_2}$.

□