PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 12/01/2026 AU 16/01/2026

Produits scalaires - Espaces préhilbertiens

Programme précédent.

Espaces vectoriels normés

Pas d'exercice de "topologie pure et dure". Sur ce thème en PSI : normes, suites, convergence, fonctions...

(1) Norme : définition, distance entre deux vecteurs, inégalité triangulaire inversée.

(2) Exemples fondamentaux :
- dans un espace vectoriel de dimension finie, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ relativement à une base de E ;
- cas particulier de $\mathbb{K}^n$ muni de la base canonique ;
- dans $E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$, les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$;
- $\|.\|_\infty$ (induite par $\|.\|$) dans l'espace des applications bornées de X dans $(E, \|.\|)$ (en particulier les fonctions réelles/complexes bornées, les suites réelles/complexes bornées).

(3) Boule ouverte - Boule fermée - Sphère. Représentation des boules-unités usuelles dans $\mathbb{R}^2$.

(4) Parties bornées. Applications bornées.

(5) Parties convexes. Exemple des boules.

(6) Normes équivalentes. Exemple des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$. Contre-exemple des normes usuelles sur $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$. Si deux normes sont équivalentes, toute partie bornée pour l'une est bornée pour l'autre.

(7) Suites de vecteurs : vocabulaire, convergence (définition, caractérisation, propriétés, invariance par passage à une norme équivalente).

(8) Éléments de topologie : ouverts, fermés (complémentaire d'un ouvert + caractérisation séquentielle), adhérence (ensemble des points adhérents + caractérisation séquentielle), densité, invariance des notions par passage à une norme équivalente.

(9) Limite et continuité d'une fonction : définition, continuité et prolongement par continuité, continuité sur une partie D (= continuité de la restriction à D en tout point de D) caractérisation séquentielle, opérations, lipschitzienne implique continue, image réciproque d'un fermé/ouvert par une application continue.

(10) Cas particulier de la dimension finie : équivalence des normes, utilisation des suites coordonnées/fonctions coordonnées dans une base, théorème des bornes atteintes (*Toute fonction à valeurs réelles continue sur une partie non vide fermée et bornée d'un evn de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.*), toute application linéaire/n-linéaire sur un/des evn de dimension finie est continue.

Questions de cours :

(1) Montrer qu'une des trois normes usuelles sur E de dimension finie muni d'une base (ou sur $\mathbb{K}^n$ au choix de l'interrogateur) est une norme (norme au choix de l'interrogateur).

(2) Montrer qu'une des trois normes usuelles sur $E = \mathcal{C}^0([a;b], \mathbb{K})$ est une norme (au choix de l'interrogateur). Le lemme $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ (avec $\lambda \geq 0$) a été démontré en cours et pourra être utilisé sans démonstration.

(3) Montrer qu'une boule est convexe (fermée ou ouverte au choix de l'interrogateur).

(4) Démontrer que les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. Donner, en le justifiant, un exemple de deux normes non équivalentes (normes au choix de l'étudiant).