

PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 26/01/2026 AU 30/01/2026

Suites de fonctions

Programme de la semaine dernière.

Séries de fonctions

- (1) Convergence simple (définition de la somme et du reste), convergence uniforme, CVU sur tout segment. Convergence normale, normale sur tout segment. Liens entre ces convergences.
- (2) Caractérisation de la convergence uniforme par la CVU de la suite des restes.
- (3) Théorème de la double limite. Théorème de continuité pour les séries de fonctions (version globale et version locale).
- (4) Théorème de classe \mathcal{C}^1 pour les séries de fonctions (version globale et version locale). Extension au cas de la classe \mathcal{C}^p .
- (5) Deux exemples fondamentaux : l'exponentielle et la fonction ζ de Riemann.
- (6) Théorèmes d'intégration terme à terme :
 - (a) en cas de CVU d'une série de fonctions continues sur un segment ;
 - (b) théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle.
 - (c) exemple d'intégration terme à terme en appliquant le TCD à la suite des sommes partielles.

Questions de cours :

- (1) Définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme. La CVU de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f entraîne la CVS de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f .
- (2) N'importe quels théorèmes sur les suites ou les séries de fonctions.
- (3) Démontrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que $S' = S$.
- (4) Domaine de définition de ζ . Montrer que ζ est continue sur I et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$.