PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 19/01/2026 AU 23/01/2026

Espaces vectoriels normés

Programme de la semaine dernière.

Pas d'exercice de "topologie pure et dure". Sur ce thème en PSI : normes, suites, convergence, continuité ...

Suites de fonctions

(1) Convergence simple, uniforme, uniforme sur tout segment. Liens entre ces convergences.

(2) Caractérisations de la convergence uniforme sur I :

  (a) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement si :
  - les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur I à partir d'un certain rang n_0 ;
  - la suite $(\|f_n - f\|_\infty)_{n\geq n_0}$ converge vers 0.

  (b) La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I si et seulement s'il existe une suite numérique $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :
  - à partir d'un certain rang, $|f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n$ pour tout $x \in I$;
  - $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

(3) La limite uniforme d'une suite de fonctions bornées est bornée.

(4) Théorème de continuité de la limite uniforme (version globale et version locale).

(5) Théorème d'interversion limite/intégrale sur un segment. Théorème de convergence dominée.

(6) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$ pour les suites de fonctions.

Questions de cours :

(1) Montrer qu'une des trois normes usuelles sur E de dimension finie (ou sur $\mathbb{K}^n$ au choix de l'interrogateur) muni d'une base est une norme (norme au choix de l'interrogateur).

(2) Montrer qu'une des trois normes usuelles sur $E = \mathcal{C}^0([a;b],\mathbb{K})$ est une norme (au choix de l'interrogateur). Le lemme $\sup \lambda A = \lambda \sup A$ $(\lambda \geq 0)$ a été démontré en cours et pourra être utilisé sans démonstration.

(3) Montrer qu'une boule est convexe (fermée ou ouverte au choix de l'interrogateur).

(4) Démontrer que les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes. Donner, en le justifiant, un exemple de deux normes non équivalentes.

(5) Définitions de la convergence simple et de la convergence uniforme. La CVU de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f entraîne la CVS de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f.

(6) Énoncé de n'importe quel théorème sur les suites de fonctions.