PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 02/02/2026 AU 06/02/2026

Séries de fonctions

(1) Convergence simple (définition de la somme et du reste), convergence uniforme, CVU sur tout segment. Convergence normale, normale sur tout segment. Liens entre ces convergences.

(2) Caractérisation de la convergence uniforme par la CVU de la suite des restes.

(3) Théorème de la double limite. Théorème de continuité pour les séries de fonctions (version globale et version locale).

(4) Théorème de classe $\mathcal{C}^1$ pour les séries de fonctions (version globale et version locale). Extension au cas de la classe $\mathcal{C}^p$.

(5) Deux exemples fondamentaux : l'exponentielle et la fonction ζ de Riemann.

(6) Théorèmes d'intégration terme à terme :

   (a) en cas de CVU d'une série de fonctions continues sur un segment ;

   (b) théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle ;

   (c) si les théorèmes ci-dessus ne peuvent s'appliquer, on essaie d'appliquer le TCD à la suite des sommes partielles (aucune autre méthode n'a été vue).

Séries entières

(1) Définitions - Notations *($\sum a_n z^n$ désigne aussi bien une série numérique que la série entière (=série de fonctions), on sera précis sur le vocabulaire utilisé)*. Extension de l'expression *converge simplement* au cas de la variable complexe. DSE de exp, $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$.

(2) Rayon de convergence (= $\sup\{r \in [0, +\infty[\mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ si cet ensemble est majoré, $+\infty$ sinon). Lemme d'Abel. Théorème fondamental sur le lien entre rayon de convergence et convergence de la série entière.

(3) Théorème de comparaison ($|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_n$) - Règle du n^α - Règle de d'Alembert pour les séries entières (non lacunaires) - Exemples d'utilisation du critère de d'Alembert pour les séries numériques.

(4) Opérations entre séries entières : combinaison linéaire, produit de Cauchy.

Questions de cours :

En première question de cours, il sera demandé le calcul du rayon de convergence d'une série entière avec les méthodes classiques vues en cours : utilisation d'une valeur particulière de z pour obtenir une majoration/minoration de R , comparaison ($\sim$, $\leq$, o, O), règle du n^α, critère de d'Alembert pour les séries numériques, règle de d'Alembert pour les séries entières.

(1) Démontrer que $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est définie, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que $S' = S$. Évident, il est interdit de parler de la fonction exponentielle !

(2) Domaine de définition de $\zeta : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est continue sur I et calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \zeta(x)$.

(3) Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\mathrm{e}^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3}$.

(4) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.