

PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 23/02/2026 AU 27/02/2026

Séries de fonctions

Programme de la semaine dernière.

Séries entières

- (1) Définitions - Notations ($\sum a_n z^n$ désigne aussi bien une série numérique que la série entière (=série de fonctions), on sera précis sur le vocabulaire utilisé). Extension de l'expression *converge simplement* au cas de la variable complexe. DSE de \exp , $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$.
- (2) Rayon de convergence ($= \sup\{r \in [0, +\infty[\mid (a_n r^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est bornée} \}$ si cet ensemble est majoré, $+\infty$ sinon). Lemme d'Abel. Théorème fondamental sur le lien entre rayon de convergence et convergence de la série entière.
- (3) Théorème de comparaison ($|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_n$) - Règle du n^α - Règle de d'Alembert pour les séries entières (non lacunaires) - Exemples d'utilisation du critère de d'Alembert pour les séries numériques.
- (4) Opérations entre séries entières : combinaison linéaire, produit de Cauchy.
- (5) Régularité de la somme pour une série entière de la variable réelle. CVN sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Primitivation. Classe \mathcal{C}^∞ sur $] - R; R[$ et dérivation terme à terme. Unicité des coefficients et $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. DSE de $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, \arctan .
- (6) Développement en série entière : série de Taylor, si une fonction est DSE, alors la série entière est la série de Taylor. Taylor avec reste intégral/Taylor-Lagrange. DSE de \cos , \sin , ch , sh . Utilisation d'une équ. diff pour obtenir le DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.
- (7) Opérations entre fonctions DSE. Exemples de calculs de sommes.
- (8) Séries entières de la variable complexe : la série géométrique et la série exponentielle (rappels). Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence (ADMIS).
- (9) Fonctions génératrices : définition, CVN et continuité sur $[-1; 1]$ ($= E(t^X)$), caractère \mathcal{C}^∞ sur $] - 1; 1[$; caractérisation de la loi par la fonction génératrice; fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.
 X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et $E(X) = G'_X(1)$.
 X^2 est d'espérance finie ssi $G''_X(1)$ existe et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
Dans le cas particulier où $R > 1$, ces deux formules s'appliquent.

À l'attention des interrogateurs : pas de théorème radial au programme de PSI.

Questions de cours :

En première question de cours, demander l'énoncé de deux DSE usuels sur l'intervalle ouvert de convergence.

- (1) Démontrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ est définie, de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et que $S' = S$. Évident, il est interdit de parler de la fonction exponentielle !
- (2) Domaine de définition de $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Montrer que ζ est continue sur I et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \zeta(x)$.
- (3) Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(n+1)^3}$.
- (4) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+t^3} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$.
- (5) Rayon de convergence et somme de $\sum \operatorname{ch}(n)z^n$ et de $\sum n^2 x^n$.
- (6) Calculer la fonction génératrice de X dans les deux cas suivants : $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0; 1[$) et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0; +\infty[$).
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement deux lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Quelle est la loi de $X + Y$?