Exercice 1. **[Démontrer le théorème spectral]**

(1) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on note $\overline{A}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ obtenue en conjuguant tous les coefficients de A :

$$\forall (i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!],\ (\overline{A})_{i,j} = \overline{(A)_{i,j}}.$$

(a) Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, $\overline{A}^T = \overline{A^T}$.

(b) Démontrer que, pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$, $\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}$.

(2) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice symétrique à coefficients réels ($n \geq 1$). Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre (a priori complexe) de A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ.

(a) En calculant de deux manières différentes $\overline{X}^T AX$, démontrer que $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) Démontrer que tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien de dimension non nulle possède une valeur propre réelle.

Évidemment, on n'utilisera pas le théorème spectral pour traiter cet exercice ...

(3) Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 1$. Soit f un endomorphisme autoadjoint de E.

(a) Soit $x \in E$ un vecteur propre de f. Démontrer que $F = \text{Vect}(x)^\perp$ est stable par f.

(b) Démontrer par récurrence sur $\dim(E) \geq 1$ qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f. Comment appelle-t-on ce théorème ?

Indications. (1) Calculs directs.

(2) (a) Noter $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ et suivre l'indication.

(b) Représenter matriciellement l'endomorphisme de façon à pouvoir utiliser le résultat précédent.

(3) (a)

(b) Pour l'hérédité, on introduira l'endomorphisme induit par f sur $F = \text{Vect}(x)^\perp$ où x est un vecteur propre unitaire de f. On appliquera l'hypothèse de récurrence à cet endomorphisme induit.

Solution. (1) (a) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. $\overline{A}^T$ et $\overline{A^T}$ sont dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{C})$. Soient $j \in [\![1;p]\!]$ et $i \in [\![1;n]\!]$.

$$\left(\overline{A}^T\right)_{j,i} = \left(\overline{A}\right)_{i,j} = \overline{(A)_{i,j}} = \overline{(A^T)_{j,i}} = \left(\overline{A^T}\right)_{j,i}$$

donc $\boxed{\overline{A}^T = \overline{A^T}}$.

(b) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{C})$. Conjuguer ne change pas la taille des matrices donc le produit $\overline{A}.\overline{B}$ est bien défini et appartient à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Soient $j \in [\![1;p]\!]$ et $i \in [\![1;n]\!]$.

$$\left(\overline{A}.\overline{B}\right)_{i,j} = \sum_{k=1}^{q} \left(\overline{A}\right)_{i,k} \left(\overline{B}\right)_{k,j} = \sum_{k=1}^{q} \overline{(A)_{i,k}}.\overline{(B)_{k,j}} = \overline{\sum_{k=1}^{q} (A)_{i,k}(B)_{k,j}} = \overline{(AB)_{i,j}} = \left(\overline{AB}\right)_{i,j}$$

donc $\boxed{\overline{AB} = \overline{A}.\overline{B}}$.

(2) (a) On note $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. X est non nul donc les x_k sont non tous nuls.

D'une part :

$$\overline{X}^T AX = \overline{X}^T (AX) = \lambda \overline{X}^T X = \lambda \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} x_k = \lambda \underbrace{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}_{\in \mathbb{R}_+^*}.$$

D'autre part, A est réelle et symétrique donc :

$$\overline{X}^T AX = (\overline{X}^T \overline{A}^T)X = (\overline{A}.\overline{X})^T X = \overline{AX}^T X = \overline{\lambda X}^T X = \overline{\lambda}(\overline{X}^T X) = \overline{\lambda} \sum_{k=1}^{n} |x_k|^2.$$

On en déduit que $\lambda = \overline{\lambda}$ et donc $\boxed{\lambda \in \mathbb{R}}$.

(b) Soit f un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E. La matrice A de f dans $\mathcal{B}$ est symétrique réelle donc on peut utiliser le résultat précédent : χ_A est scindé sur $\mathbb{C}$ (comme tout polynôme !) donc A possède une valeur propre complexe qui, d'après le résultat précédent, est réelle. Ainsi, $\boxed{f \text{ (qui a le même spectre que } A\text{) possède une valeur propre réelle}}$.

(3) (a) Soit $x \in E$ un vecteur propre de f. Notons λ la valeur propre associée. Soit $y \in F = \text{Vect}(x)^\perp$. Montrons que $f(y) \in F$. Soit $u \in \text{Vect}(x)$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha x$. est stable par f.

$$\langle f(y), u \rangle = \langle f(y), \alpha x \rangle \underset{f \in \mathcal{S}(E)}{=} \langle y, f(\alpha x) \rangle = \langle y, \alpha f(x) \rangle = \alpha\lambda \langle y, x \rangle \underset{y \in F}{=} 0$$

donc $f(y) \in F$ donc $\boxed{F \text{ est stable par } f}$.

(b)
- Supposons que $\dim(E) = 1$. Soit e_1 un vecteur normé de E. (e_1) est une base orthonormée de E et $f(e_1) \in \text{Vect}(e_1)$ puisque $E = \text{Vect}(e_1)$. Ainsi, e_1 est un vecteur propre de f. Ceci initialise la récurrence.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que, pour tout espace euclidien E de dimension n, pour tout endomorphisme autoadjoint f de E, il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de f.

  Soit E un espace euclidien de dimension $n+1$. D'après $(2)(b)$, f possède une valeur propre λ réelle. Notons e_{n+1} un vecteur propre unitaire associé à cette valeur propre. Notons $F = \text{Vect}(e_{n+1})^\perp$ qui est de dimension n. D'après $(3)(a)$, F est stable par f donc f induit sur F un endomorphisme $\tilde{f}$ qui est aussi autoadjoint (la définition s'applique à tous les vecteurs de E donc à tous les vecteurs de F). On peut appliquer à $\tilde{f}$ l'hypothèse de récurrence : il existe une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de F formée de vecteurs propres de $\tilde{f}$ et donc de vecteurs propres de f. Par construction, la famille $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ est orthnormée donc est une base orthonormée de E $(\dim(E) = n+1)$ qui est formée de vecteurs propres de F, ce qui termine la récurrence. Nous venons de démontrer $\boxed{\text{le théorème spectral}}$.