PROGRAMME DE COLLE PSI - SEMAINE DU 02/03/2026 AU 06/03/2026

Séries entières

(1) Définitions - Notations ($\sum a_n z^n$ *désigne aussi bien une série numérique que la série entière (=série de fonctions), on sera précis sur le vocabulaire utilisé)*. Extension de l'expression *converge simplement* au cas de la variable complexe. DSE de exp, $x \mapsto \frac{1}{1\pm x}$.

(2) Rayon de convergence ($= \sup\{r \in [0, +\infty[\mid (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée$\}$ si cet ensemble est majoré, $+\infty$ sinon). Lemme d'Abel. Théorème fondamental sur le lien entre rayon de convergence et convergence de la série entière.

(3) Théorème de comparaison ($|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n = o(b_n)$, $a_n \sim b_n$) - Règle du n^α - Règle de d'Alembert pour les séries entières (non lacunaires) - Exemples d'utilisation du critère de d'Alembert pour les séries numériques.

(4) Opérations entre séries entières : combinaison linéaire, produit.

(5) Régularité de la somme pour une série entière de la variable réelle. CVN sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence. Primitivation. Classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R;R[$ et dérivation terme à terme. Unicité des coefficients et $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. DSE de $x \mapsto \ln(1\pm x)$, arctan.

(6) Développement en série entière : série de Taylor, si une fonction est DSE, alors la série entière est la série de Taylor. Taylor avec reste intégral/Taylor-Lagrange. DSE de cos, sin, ch, sh. Utilisation d'une équa diff pour obtenir le DSE de $x \mapsto (1+x)^\alpha$.

(7) Opérations entre fonctions DSE. Exemples de calculs de sommes.

(8) Séries entières de la variable complexe : la série géométrique et la série exponentielle (rappels). Continuité de la somme sur le disque ouvert de convergence (ADMIS).

(9) Fonctions génératrices : définition, CVN et continuité sur $[-1;1]$ ($= E(t^X)$), caractère $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1;1[$; caractérisation de la loi par la fonction génératrice ; fonction génératrice d'une somme de v.a. indépendantes.
X est d'espérance finie ssi G_X est dérivable en 1 et $E(X) = G'_X(1)$.
X^2 est d'espérance finie ssi $G''_X(1)$ existe et $V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$.
Dans le cas particulier où $R > 1$, ces deux formules s'appliquent.

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

(1) Matrices orthogonales.
Définition et caractérisations. Groupe orthogonal. Déterminant. Groupe spécial orthogonal.

(2) Endomorphismes auto-adjoints.
  (a) Définition. Caractérisation des projecteurs orthogonaux, des symétries orthogonales. Caractérisation matricielle.
  (b) Théorème spectral (version endomorphisme et version matricielle). Diagonalisation pratique d'une matrice symétrique.
  (c) Endomorphisme auto-adjoint positif (défini positif). Matrice symétrique positive (définie positive). Lien entre les deux. Caractérisation par le signe des valeurs propres. Cas pratique si $n = 2$.

Questions de cours :

En première question de cours, demander deux DSE usuels.

(1) Rayon de convergence et somme de $\sum \mathrm{ch}(n) z^n$ et de $\sum n^2 x^n$.

(2) Calculer la fonction génératrice de X dans les deux cas suivants : $X \sim \mathcal{G}(p)$ ($p \in]0;1[$) et $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ($\lambda \in]0;+\infty[$).
Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes qui suivent respectivement deux lois de Poisson de paramètres $\lambda > 0$ et $\mu > 0$. Quelle est la loi de $X+Y$?

(3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E. f est autoadjoint si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.

(4) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que si F est stable par f, alors $F^\perp$ l'est également. Montrer que les deux sous-espaces propres de f sont orthogonaux.

(5) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. f est autoadjoint positif (respectivement défini positif) si et seulement si les valeurs propres de f sont positives (respectivement strictement positives).