

# Chapitre 13 - Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$  contenant au moins deux éléments.

## I – Généralités sur les équations différentielles linéaires : rappels

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction  $y$  dérivable au moins une fois et qui fait intervenir  $y, y',$  éventuellement  $y'', \dots$  La recherche d'une primitive d'une fonction  $u$  est un cas particulier d'équation différentielle :  $y' = u$ . Comme pour les calculs de primitives, les équations différentielles seront résolues sur des intervalles. On ne perdra pas de vue que la plupart des équations différentielles ne peuvent être résolues de manière exacte. Celles qui sont étudiées ci-dessous ne sont qu'une infime partie des équations différentielles que vous pourrez rencontrer dans la vraie vie!

**Définition I.0.1.** • Soient  $u, v$  et  $d$  trois fonctions définies et continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

Résoudre sur  $I$  l'équation

$$(E) : u(t)y' + v(t)y = d(t),$$

c'est déterminer l'ensemble des fonctions  $y$  dérivables sur  $I$  telles que

$$\forall t \in I, u(t)y'(t) + v(t)y(t) = d(t).$$

Une telle fonction est appelée solution de  $(E)$  sur  $I$ .

On dit que  $(E)$  est une équation différentielle linéaire du premier ordre.

On notera  $\mathcal{S}_{(E)}^I$  l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  (c'est un ensemble de fonctions!).

*Remarque.*

— La notation  $(E) : u(t)y' + v(t)y = d(t)$  sous-entend qu'on cherche des fonctions  $y$  de la variable  $t$ . S'il y a une ambiguïté, l'énoncé devra préciser quelle est la fonction inconnue et quelle est la variable.

Parfois, on notera  $(E) : u(t)y'(t) + v(t)y(t) = d(t)$  ou  $(E) : uy' + vy = d$ .

— La notation  $u(t)y' + v(t)y = d(t)$  n'est qu'une façon abrégée d'écrire l'équation.

Pour dire qu'une fonction dérivable  $y$  est solution, on ne dira pas " $u(t)y' + v(t)y = d(t)$ " mais on dira :  
"*pour tout  $t \in I, u(t)y'(t) + v(t)y(t) = d(t)$* ".

- Le terme  $d(t)$  est appelé second membre de l'équation différentielle. Si  $d$  est la fonction nulle, on dit que l'équation  $(E)$  est homogène ou sans second membre.

Généralement, on appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à  $(E)$  l'équation

$$(E_0) : u(t)y' + v(t)y = 0.$$

- **Si  $u$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$** , on peut diviser les deux membres de l'équation  $(E)$  par  $u(t)$  et obtenir une équation équivalente de la forme :

$$(E') : y' + a(t)y = b(t),$$

où  $a$  et  $b$  sont deux fonctions continues sur  $I$ .

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on appelle courbes intégrales les représentations graphiques des solutions de  $(E)$ .

Si on cherche les solutions  $y$  de  $(E)$  qui vérifient une condition initiale de la forme  $y(t_0) = y_0$  ( $t_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{K}$ ), on dit que l'on résout un problème de Cauchy.

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , cela revient à chercher les courbes intégrales qui passent par le point de coordonnées  $(t_0, y_0)$ .

**Définition I.0.2.** • Soient  $u, v, w$  et  $d$  quatre fonctions définies et continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

Résoudre sur  $I$  l'équation

$$(E) : u(t)y'' + v(t)y' + w(t)y = d(t)$$

c'est déterminer l'ensemble des fonctions  $y$  deux fois dérivables sur  $I$  telles que

$$\forall t \in I, u(t)y''(t) + v(t)y'(t) + w(t)y(t) = d(t).$$

Une telle fonction est appelée solution de  $(E)$  sur  $I$ .

On dit que  $(E)$  est une équation différentielle linéaire du second ordre.

On notera  $\mathcal{S}_{(E)}^I$  l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  (c'est un ensemble de fonctions!).

- Le terme  $d(t)$  est appelé second membre de l'équation différentielle.

Si  $d$  est la fonction nulle, on dit que l'équation  $(E)$  est homogène ou sans second membre.

Généralement, on appelle équation homogène (ou sans second membre) associée à  $(E)$  l'équation

$$(E_0) : u(t)y'' + v(t)y' + w(t)y = 0.$$

- **Si  $u$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$** , on peut diviser les deux membres de l'équation  $(E)$  par  $u(t)$  et obtenir une équation équivalente de la forme :

$$(E') : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

où  $a, b$  et  $c$  sont trois fonctions continues sur  $I$ .

- Si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , on appelle courbes intégrales les représentations graphiques des solutions de  $(E)$ .

Si on cherche les solutions  $y$  de  $(E)$  qui vérifient deux conditions initiales  $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = v_0 \end{cases}$  ( $t_0 \in I, y_0$  et  $v_0$  dans  $\mathbb{K}$ ),

on dit que l'on résout un problème de Cauchy.

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , cela revient à chercher les courbes intégrales qui passent par le point de coordonnées  $(t_0, y_0)$  avec une tangente en ce point de pente  $v_0$ .

**Proposition I.0.3** (Principe de superposition de solutions).

- (1) Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions définies et continues sur  $I$ ,  $d_1$  et  $d_2$  deux fonctions définies et continues sur  $I$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\mathbb{K}$ . On définit les équations différentielles

$$(E_1) : u(t)y' + v(t)y = d_1(t),$$

$$(E_2) : u(t)y' + v(t)y = d_2(t),$$

$$(E) : u(t)y' + v(t)y = \lambda_1 d_1(t) + \lambda_2 d_2(t).$$

Si  $f_1$  est solution de  $(E_1)$  et si  $f_2$  est solution de  $(E_2)$  sur  $I$ , alors  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ .

- (2) Soient  $u, v$  et  $w$  trois fonctions définies et continues sur  $I$ ,  $d_1$  et  $d_2$  deux fonctions définies et continues sur  $I$ ,  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  dans  $\mathbb{K}$ . On définit les équations différentielles

$$(E_1) : u(t)y'' + v(t)y' + w(t)y = d_1(t),$$

$$(E_2) : u(t)y'' + v(t)y' + w(t)y = d_2(t),$$

$$(E) : u(t)y'' + v(t)y' + w(t)y = \lambda_1 d_1(t) + \lambda_2 d_2(t).$$

Si  $f_1$  est solution de  $(E_1)$  et si  $f_2$  est solution de  $(E_2)$  sur  $I$ , alors  $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$  est solution de  $(E)$  sur  $I$ .

**Corollaire I.0.4.** L'ensemble des solutions sur  $I$  d'une équation différentielle linéaire **homogène** est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Théorème I.5** (Structure de l'ensemble des solutions). Soit  $(E)$  une équation différentielle linéaire. Notons  $(E_0)$  l'équation homogène associée. Si  $f_p$  est une solution de  $(E)$  sur  $I$  (souvent appelée solution particulière) et si on note  $\mathcal{S}_{(E_0)}^I$  l'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $I$ , alors l'ensemble des solutions de  $(E)$  est

$$\mathcal{S}_{(E)}^I = \left\{ f_p + g, g \in \mathcal{S}_{(E_0)}^I \right\}.$$

*Remarque.* Pour résoudre une équation différentielle linéaire  $(E)$ , on commence donc par résoudre  $(E_0)$  puis on cherche une solution  $f_p$  de  $(E)$  qu'il suffit de rajouter aux solutions de  $(E_0)$  pour obtenir toutes les solutions de  $(E)$ .

## II – Cas des équations du premier ordre : rappels

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur  $I$ . On considère l'équation différentielle

$$(E) : y' + a(t)y = b(t).$$

Dans le cas où l'équation à résoudre est de la forme  $u(t)y' + v(t)y = d(t)$ , il suffit de **se placer sur un intervalle  $I$  où  $u$  ne s'annule pas** et de diviser les deux membres de l'équation par  $u(t)$  pour se ramener aux résultats décrits ci-après. Les deux formes de l'équation peuvent être utilisées, par exemple pour trouver une solution particulière.

### 1) Résolution de $(E_0) : y' + a(t)y = 0$

#### Théorème II.1.

Soit  $a$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle homogène  $(E_0) : y' + a(t)y = 0$ . Soit  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$ . L'ensemble des solutions de  $(E_0)$  sur  $I$  est  $\mathcal{S}_{(E_0)}^I = \{t \mapsto \lambda e^{-A(t)}, \lambda \in \mathbb{K}\}$ .

#### Théorème II.2 (Théorème de Cauchy linéaire (version structure) : ordre 1).

Soit  $a$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle homogène  $(E_0) : y' + a(t)y = 0$ .  $\mathcal{S}_{(E_0)}^I$  est une droite vectorielle. Si  $f_0$  est une solution non nulle de  $(E_0)$  sur  $I$ , on a  $\mathcal{S}_{(E_0)}^I = \text{Vect}(f_0) = \{\lambda f_0, \lambda \in \mathbb{K}\}$ .

*Exemple II.1.3.* (1) Équations à coefficients constants. Soient  $a \in \mathbb{K}^*$  et  $b \in \mathbb{K}$ .

L'ensemble des solutions de  $(E_0) : ay' + by = 0$  est  $\left\{ t \mapsto \lambda e^{-\frac{b}{a}t}, \lambda \in \mathbb{K} \right\} = \text{Vect} \left( t \mapsto e^{-\frac{b}{a}t} \right)$ .

(2) On note  $I = ]0; \pi[$  et  $(E_0) : y' \sin(t) - y \cos(t) = 0$ . Résoudre sur  $I$  cette équation, d'abord en utilisant une solution remarquable puis en utilisant le théorème.

### 2) Recherche d'une solution particulière

L'équation homogène étant résolue (voir la partie précédente), il ne reste qu'à trouver une solution de  $(E)$ .

#### a. Solution "remarquable"

*Exemple II.2.4.* Résoudre  $(E) : y' \sin(t) - y \cos(t) = 1$  sur  $I = ]0; \pi[$ .

*Remarque.* On pourra chercher une telle solution sous une forme particulière (constante, polynomiale,...) en fonction de la forme du second membre.

### b. Méthode de variation de la constante

- On commence par résoudre  $(E_0)$  et on note  $f_0$  une solution non nulle de  $(E_0)$ . Soit  $\lambda$  une **fonction** dérivable sur  $I$ . On cherche alors une solution  $y$  de  $(E)$  sous la forme  $y : t \mapsto \lambda(t)f_0(t)$  (d'où le nom de la méthode).

Remarquons que les solutions de  $(E_0)$  sont des multiples d'une exponentielle (voir le théorème) donc la fonction  $f_0$  ne s'annule en aucun point de  $I$ .

•

$$y = \lambda f_0 \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I \iff \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

$$\iff \forall t \in I, \lambda'(t)f_0(t) + \lambda(t)f_0'(t) + \lambda(t)a(t)f_0(t) = b(t)$$

$$\iff \forall t \in I, \lambda'(t)f_0(t) + \lambda(t)(f_0'(t) + a(t)f_0(t)) = b(t)$$

$$\iff \forall t \in I, \lambda'(t)f_0(t) = b(t)$$

$$\iff \forall t \in I, \lambda'(t) = \frac{b(t)}{f_0(t)},$$

puisque  $f_0$  est une solution de  $(E_0)$  qui ne s'annule pas sur  $I$ .

- Il ne reste plus qu'à trouver une primitive de  $\frac{b}{f_0}$  sur  $I$  (qui existe puisque  $b$  et  $f_0$  sont continues sur  $I$ ) pour conclure et trouver une solution de  $(E)$ .

*Remarque.*  La présentation des calculs faites ci-dessus (avec les notations  $a$ ,  $b$  et  $f_0$  plutôt que leurs expressions explicites) évite d'avoir à calculer la dérivée de  $f_0$  et allège donc les calculs. On remplacera  $b(t)$  et  $f_0(t)$  par leur expression uniquement dans la dernière ligne.

Exercice II.2.5. Résoudre  $(E) : ty' - y = t^2 e^t$  sur  $I = ]0; +\infty[$ .

### 3) Résolution d'un problème de Cauchy

**Théorème II.6** (Théorème de Cauchy linéaire : ordre 1).

Soit  $a$  et  $b$  deux fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle  $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ .

Soit  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ . Il existe une unique solution  $y$  de  $(E)$  sur  $I$  telle que  $y(t_0) = y_0$  (condition initiale).

Exercice II.3.7. Déterminer l'unique solution de  $(E) : ty' - y = t^2 e^t$  sur  $I = ]0; +\infty[$  qui s'annule en 1.

## III – Cas des équations du second ordre

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions continues sur  $I$ . On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Dans le cas où l'équation à résoudre est de la forme  $u(t)y'' + v(t)y' + w(t)y = d(t)$ , il suffit de **se placer sur un intervalle  $I$  où  $u$  ne s'annule pas** et de diviser les deux membres de l'équation par  $u(t)$  pour se ramener aux résultats décrits ci-après. Les deux formes de l'équation peuvent être utilisées, par exemple pour trouver une solution particulière.

*Remarque.* Contrairement au cas des équations du premier ordre, **il n'existe pas de méthode générale de résolution.**

La résolution explicite d'une équation différentielle du second ordre devra comporter des indications.

Dans la suite, nous allons donner des résultats sur la structure de l'ensemble des solutions et quelques techniques classiques de résolution.

## 1) Théorème de Cauchy linéaire

**Théorème III.1** (ADMIS - Théorème de Cauchy linéaire : ordre 2).

Soit  $a, b$  et  $c$  trois fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

Soit  $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ . Il existe une unique solution  $y$  de  $(E)$  sur  $I$  telle que  $y(t_0) = y_0$  et  $y'(t_0) = v_0$  (conditions initiales).

**Théorème III.2** (Théorème de Cauchy linéaire (version structure) : ordre 2).

Soit  $a, b$  et  $c$  trois fonctions continues sur un intervalle  $I$ . On considère l'équation différentielle

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t).$$

On note  $(E_0)$  l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .

- $\mathcal{S}_{(E_0)}^I$  est un plan vectoriel. Notons  $(f_0, g_0)$  une base de  $\mathcal{S}_{(E_0)}^I$ .
- Il existe (au moins) une solution  $f_p$  de  $(E)$  sur  $I$ .
- L'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  est  $\mathcal{S}_{(E)}^I = f_p + \mathcal{S}_{(E_0)}^I = \{t \mapsto f_p(t) + \lambda f_0(t) + \mu g_0(t), (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ .

Remarque. 

- (1) On commencera toujours par mettre l'équation sous la forme qui permet d'utiliser le théorème et par citer le théorème.

Notons  $I$  l'intervalle .... Les fonctions  $a : t \mapsto \dots$ ,  $b : t \mapsto \dots$  et  $c : t \mapsto \dots$  sont continues sur  $I$ . D'après le théorème de Cauchy,  $\mathcal{S}_{(E_0)}^I$  est un plan vectoriel et il existe au moins une solution  $f_p$  de  $(E)$  sur  $I$ . Enfin :  $\mathcal{S}_{(E)}^I = f_p + \mathcal{S}_{(E_0)}^I$ .

- (2) Ensuite, pour résoudre explicitement l'équation, il s'agit de trouver deux solutions **indépendantes** de  $(E_0)$  ainsi qu'une solution (particulière) de  $(E)$ . Ces recherches sont l'objet du reste du chapitre ...

## 2) Le cas particulier des coefficients constants

On rappelle ici des résultats rencontrés en première année, lorsque les coefficients de l'équation (les fonctions  $a$  et  $b$ ) sont des constantes.

Soient  $a \in \mathbb{K}^*$ ,  $b \in \mathbb{K}$ ,  $c \in \mathbb{K}$  et  $d$  une fonction continue de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ . On considère l'équation différentielle

$$(E) : ay'' + by' + cy = d(t).$$

On note également  $(E_0) : ay'' + by' + cy = 0$ .

### a. Résolution de l'équation homogène

**Théorème III.3** (Cas complexe :  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ).

- (1) Si  $ar^2 + br + c = 0$  (équation caractéristique) possède deux solutions distinctes  $r_1$  et  $r_2$ , alors l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  à valeurs complexes de  $(E_0)$  est

$$\mathcal{S}_{(E_0)}^{\mathbb{R}} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t}).$$

- (2) Si  $ar^2 + br + c = 0$  possède une solution double  $r_0$ , alors

$$\mathcal{S}_{(E_0)}^{\mathbb{R}} = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto te^{r_0 t}).$$

**Théorème III.4** (Cas réel :  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ). Supposons que  $a, b$  et  $c$  sont réels.

- (1) Si  $ar^2 + br + c = 0$  (équation caractéristique) possède deux solutions **réelles** distinctes  $r_1$  et  $r_2$  ( $\Delta > 0$ ), alors l'ensemble des solutions sur  $\mathbb{R}$  à **valeurs réelles** de  $(E_0)$  est

$$\mathcal{S}_{(E_0)}^{\mathbb{R}} = \text{Vect} \left( t \mapsto e^{r_1 t}, t \mapsto e^{r_2 t} \right).$$

- (2) Si  $ar^2 + br + c = 0$  possède une solution double  $r_0$  ( $\Delta = 0$ ), alors

$$\mathcal{S}_{(E_0)}^{\mathbb{R}} = \text{Vect} \left( t \mapsto e^{r_0 t}, t \mapsto t e^{r_0 t} \right).$$

- (3) Si  $ar^2 + br + c = 0$  possède deux solutions complexes non réelles ( $\Delta < 0$ ) conjuguées  $\alpha + i\beta$  et  $\alpha - i\beta$  ( $\alpha$  et  $\beta$  réels), alors

$$\mathcal{S}_{(E_0)}^{\mathbb{R}} = \text{Vect} \left( t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\beta t), t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\beta t) \right).$$

## b. Recherche d'une solution particulière

**Proposition III.2.5** ( $d(t) = Ae^{mt}$ ). Considérons  $(E) : ay'' + by' + cy = Ae^{mt}$ .

- (1) Si  $m$  n'est pas solution de l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ , alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $t \mapsto \alpha e^{mt}$  soit solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit de remplacer  $y$  par cette expression dans l'équation  $(E)$  pour obtenir  $\alpha$ .
- (2) Si  $m$  est solution simple de l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$  (c'est-à-dire qu'il existe une autre solution), alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $t \mapsto \alpha t e^{mt}$  soit solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit de remplacer  $y$  par cette expression dans l'équation  $(E)$  pour obtenir  $\alpha$ .
- (3) Si  $m$  est solution double de l'équation caractéristique  $ar^2 + br + c = 0$ , alors il existe  $\alpha \in \mathbb{K}$  tel que  $t \mapsto \alpha t^2 e^{mt}$  soit solution de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ . Il suffit de remplacer  $y$  par cette expression dans l'équation  $(E)$  pour obtenir  $\alpha$ .

Méthode. 

Supposons que  $a, b$  et  $c$  sont réels et  $d(t) = A \cos(\omega t)$  ou  $d(t) = A \sin(\omega t)$  avec  $A$  et  $\omega$  dans  $\mathbb{R}$ .

Dans ce cas, on cherche une solution de  $(E') : ay'' + by' + cy = Ae^{i\omega t}$  (voir proposition précédente avec  $m = i\omega$ ) et on en prend la partie réelle ou imaginaire selon le cas.

**Exemple III.2.6.** (1) Résoudre sur  $\mathbb{R} : y'' + y' - 2y = e^{3t} + e^{-2t}$ .

(2) Résoudre sur  $\mathbb{R} : y'' + y = \sin^3(t)$ .

**Exercice III.2.7.** On considère l'équation différentielle  $(E) : x^2 y'' + x y' + y = \sin(2 \ln(x))$ .

(1) Que dit le théorème de Cauchy?

(2) Soit  $f : ]0; +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction deux fois dérivable sur  $]0; +\infty[$ . On note  $g : t \mapsto f(e^t)$ .

Montrer que  $f$  est solution de  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$  si et seulement si  $g$  est solution sur  $\mathbb{R}$  d'une équation différentielle  $(E')$  que l'on précisera.

(3) Résoudre  $(E')$  sur  $\mathbb{R}$  puis  $(E)$  sur  $]0; +\infty[$ .

### 3) Méthodes pratiques de résolution

Dans cette dernière partie, on revient au cas général des équations différentielles linéaires d'ordre 2.

Soit  $a$ ,  $b$  et  $c$  trois fonctions continues sur  $I$ . On considère l'équation différentielle  $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ .

On note  $(E_0)$  l'équation différentielle homogène associée à  $(E)$ .

#### a. Recherche de solutions sous formes particulières

Pour chercher une solution de l'équation homogène ou une solution particulière de  $(E)$ , on pensera à tester des fonctions *particulières* :

- polynomiales ( $x \mapsto a_n x^n + \dots$  avec  $a_n \neq 0$ );
- puissances ( $x \mapsto x^\alpha$ );
- polynomiale  $\times$  exponentielle (voir le cas des équations à coefficients constants ci-dessus);
- ...

*Exemple III.3.8.* On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) : t^2 y'' - 4t y' + 6y = 0.$$

(1) Trouver deux solutions sur  $\mathbb{R}$  de  $E$  non proportionnelles.

(2) En déduire l'ensemble des solutions de  $E$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

#### b. Recherche de solutions développables en série entière

On pourra chercher une solution de  $(E_0)$  développable en série entière mais aussi une solution particulière de  $(E)$  développable en série entière. Cette recherche ne sera effectuée que si les fonctions  $a$  et  $b$  sont polynomiales.

*Méthode.*  On rappelle ici les éléments de rédaction utilisés lors de la recherche d'une solution développable en série entière d'une équation différentielle linéaire.

On cherche les solutions de  $(E)$  développables en série entière (DSE). Procédons par analyse-synthèse.

- (analyse) Soient  $R > 0$  et une fonction  $f$  développable en série entière sur  $] - R; R[$ . Notons  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ .

Par théorème,  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] - R; R[$  avec :  $f' : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$  et  $f'' : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$ .

$f$  est solution de  $(E)$  sur  $] - R; R[$  ssi  $(\forall x \in ] - R; R[, \dots = \dots)$  ssi ...

⋮

jusqu'à ce qu'on puisse identifier les coefficients de deux séries entières (on aura pour cela utilisé des changements d'indice pour pouvoir regrouper les différents termes) pour obtenir une relation de récurrence sur les  $a_n$  et enfin une expression des coefficients  $a_n$  et donc des potentielles solutions DSE de  $(E)$ .

- (synthèse) Déterminons le rayon de convergence de la série entière obtenue ci-dessus.

Le fait d'avoir rédigé les calculs par équivalences raccourcit considérablement cette partie. Il ne reste qu'à chercher le rayon de convergence  $R$  et à s'assurer qu'il est non nul.

- Il arrive souvent qu'on puisse exprimer les solutions grâce à des fonctions usuelles. L'utilisation de conditions initiales permet parfois de déterminer  $a_0$  ( $= f(0)$ ) et/ou  $a_1$  ( $= f'(0)$ ).

Exemple III.3.9. On souhaite résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle suivante :

$$(E) : y' = 2xy + 1.$$

- (1) Résoudre l'équation homogène associée.
- (2) Chercher une solution particulière de  $(E)$  développable en série entière.
- (3) Donner l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $\mathbb{R}$ .

Exemple III.3.10. On souhaite résoudre sur  $I = ]-1; 1[$  l'équation différentielle suivante :

$$(E) : (1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

- (1) Déterminer les solutions développables en série entière de  $(E)$ .
- (2) Exprimer ces solutions à l'aide de fonctions élémentaires.
- (3) A-t-on trouvé ainsi toutes les solutions de  $(E)$  sur  $] -1; 1[$ ?

### c. Méthode de Lagrange

Méthode. 

Lorsqu'on a trouvé une première solution  $f_0$  de l'équation homogène  $(E_0)$ , on peut en chercher une autre solution, indépendante de la première, en s'inspirant de la méthode de variation de la constante vue en première année : c'est la méthode de Lagrange.

On cherche une solution  $g_0$  de  $(E_0)$  sur  $I$  de la forme  $g_0 : t \mapsto \lambda(t)f_0(t)$  où  $\lambda$  est une fonction deux fois dérivable sur  $I$ .

$$\begin{aligned} g_0 = \lambda f_0 \text{ est solution de } (E_0) \text{ sur } I \text{ si } (\forall x \in I, \lambda''(x)f_0(x) + 2\lambda'(x)f_0'(x) + f_0''(x) + a(x)(\lambda'(x)f_0(x) + \lambda(x)f_0'(x)) + b(x)\lambda(x)f_0(x) = 0) \\ \text{ssi } (\forall x \in I, \lambda''(x)f_0(x) + \lambda'(x)(2f_0'(x) + a(x)f_0(x)) + \lambda(x)(f_0''(x) + a(x)f_0'(x) + b(x)f_0(x)) = 0) \\ \text{ssi } (\forall x \in I, \lambda''(x)f_0(x) + \lambda'(x)(2f_0'(x) + a(x)f_0(x)) = 0) \\ \text{ssi } (\lambda' \text{ est solution sur } I \text{ de } f_0(x)z' + (2f_0'(x) + a(x)f_0(x))z = 0). \end{aligned}$$

Reste à trouver une solution (pas toutes!) de cette dernière équation (homogène du premier ordre) et à calculer une primitive de cette solution pour obtenir une solution  $g_0$ . On vérifie que  $g_0$  n'est pas colinéaire à  $f_0$  (en général, ça se voit!).

Exemple III.3.11. Résoudre sur  $I = ]-\infty; -1[$  l'équation différentielle  $(E) : (x^2 + x)y'' + (3x + 2)y' + y = 1$ .

### d. Deux exemples de raccordements de solutions

On observe sur deux exemples comment résoudre une équation différentielle qui ne rentre pas dans le cadre du théorème de Cauchy : la fonction qui multiplie  $y''$  s'annule sur  $I$  ...

Exercice III.3.12. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle  $(E) : (x^2 + x)y'' + (3x + 2)y' + y = 1$ .

Exercice III.3.13. Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation différentielle homogène  $(E) : t^2 y'' - 4t y' + 6y = 0$ .

Quelle est la dimension de l'espace des solutions?