

Endomorphismes remarquables des espaces euclidiens

- (1) Matrices orthogonales.
 - (a) Définition et caractérisations. Groupe orthogonal. Déterminant. Groupe spécial orthogonal.
- (2) Endomorphismes auto-adjoints.
 - (a) Définition. Caractérisation des projecteurs orthogonaux, des symétries orthogonales. Caractérisation matricielle.
 - (b) Théorème spectral (version endomorphisme et version matricielle). Diagonalisation pratique d'une matrice symétrique.
 - (c) Endomorphisme auto-adjoint positif (défini positif). Matrice symétrique positive (définie positive). Lien entre les deux. Caractérisation par le signe des valeurs propres. Cas pratique si $n = 2$.
- (3) Isométries vectorielles.
 - (a) Définition et caractérisations. Exemple des symétries orthogonales (en particulier les réflexions). Groupe orthogonal.
 - (b) Soit $u \in O(E)$. Si F est stable par u , alors $F^\perp$ l'est aussi. Conséquence matricielle.
 - (c) $\text{Sp}(u) \subset \{-1; 1\}$, les sous-espaces propres sont orthogonaux.
 - (d) f est une isométrie vectorielle ssi sa matrice dans une bon est orthogonale. Déterminant d'une isométrie.
 - (e) Rotations. Groupe spécial orthogonal de E .
- (4) Orientation d'un espace vectoriel. Caractérisations des bon directes.
- (5) Classification des isométries d'un plan.
 - (a) Produit mixte (cas $n = 2$).
 - (b) Description de $O(2)$ et $SO(2)$.
 - (c) Description des rotations d'un plan euclidien. Définition d'une mesure de l'angle orienté (u, v) . Utilisation du produit scalaire et du produit mixte pour l'obtenir.
 - (d) Les isométries indirectes d'un plan sont les réflexions.
- (6) Classification des isométries d'un espace euclidien de dimension 3.
 - (a) Produit mixte (cas $n = 3$).
 - (b) Produit vectoriel. Définition par le théorème de représentation de Riesz. Bilinearité, antisymétrie, relations entre u, v et $u \wedge v$, norme, formule dans une bon, utilisation pour construire une bon.
 - (c) Orientation d'une droite, d'un plan de l'espace ($n = 3$).
 - (d) Description des rotations d'un espace euclidien de dimension 3. On dit que r est la rotation d'angle θ autour de l'axe dirigé et orienté par le vecteur unitaire w . Détermination de w et θ par la trace de r et le signe de $[x, r(x), w]$.

Questions de cours :

- (1) Soit $f \in O(E)$. Montrer que $\text{Sp}(f) \subset \{-1; 1\}$ (sans utiliser les matrices orthogonales) et que $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ et $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$ sont orthogonaux.
- (2) Décrire l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à $A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ -4 & 4 & -7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$.
- (3) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Soit $\mathcal{B}$ une base **orthonormée** de E . f est autoadjoint si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ est symétrique.
- (4) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. Montrer que si F est stable par f , alors $F^\perp$ l'est également. Montrer que les sous-espaces propres de f sont orthogonaux.
- (5) Soit $f \in \mathcal{S}(E)$. f est autoadjoint positif (respectivement défini positif) si et seulement si les valeurs propres de f sont positives (respectivement strictement positives).