

Chapitre 14 - Dérivation des fonctions vectorielles

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux éléments.
On désigne par n un entier naturel non nul.

I – Révisions de première année - Le cas des fonctions réelles

Dans cette partie, toutes les fonctions seront supposées définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1) Dérivabilité - Dérivée

Définition I.1.1. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

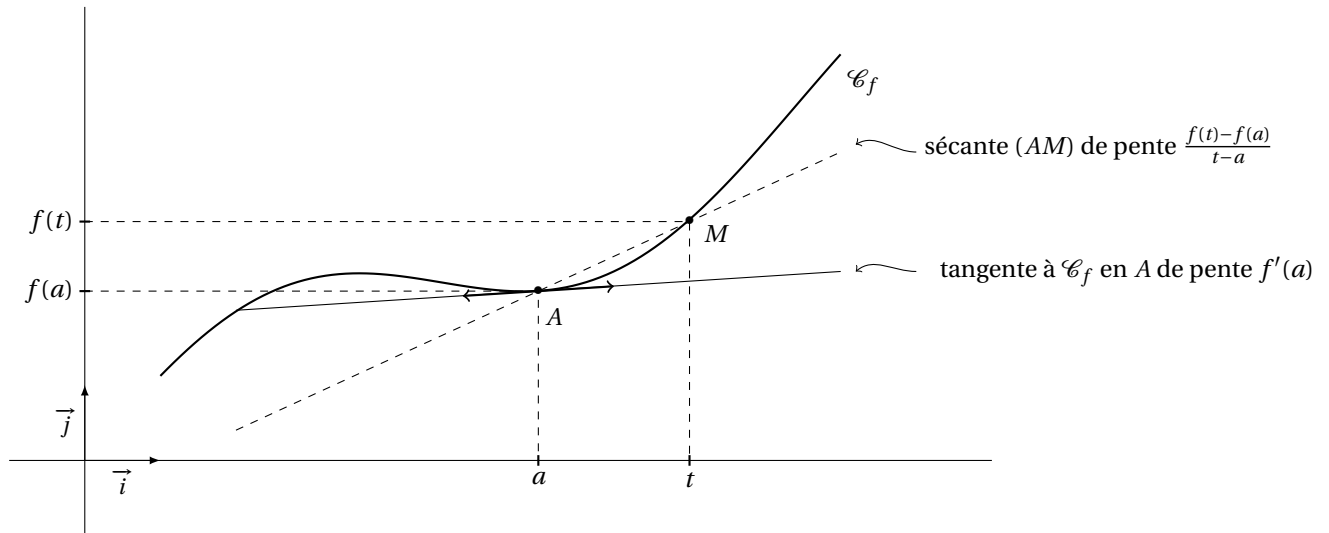
- On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau_a(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ possède une limite finie quand t tend vers a (ou si $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ possède une limite finie quand h tend vers 0).

Cette limite est alors notée $f'(a)$ et est appelée nombre dérivé de f en a (noté aussi $\frac{df}{dt}(a)$).

- Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I et on note f' la dérivée de f , c'est-à-dire la fonction $a \mapsto f'(a)$, définie sur I . On écrit généralement $t \mapsto f'(t)$.
- Si f est dérivable en a , on appelle tangente à $\mathcal{C}_f$ en a la droite d'équation $y - f(a) = f'(a)(x - a)$, de coefficient directeur $f'(a)$ et qui passe par $A(a, f(a))$ (point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a).

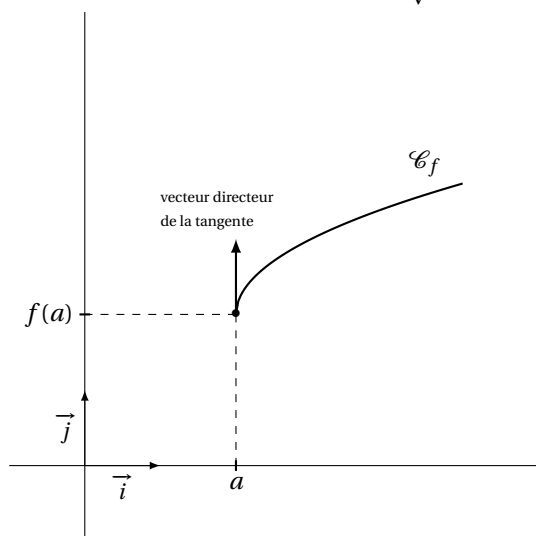
Remarque. (1) Pour tout $t \in I \setminus \{a\}$, on considère le point M de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse t ainsi que la sécante (AM) .

La tangente en a définie ci-dessus peut être vue comme la position limite de cette sécante (AM) lorsque t tend vers a (et M tend vers A car f est en fait continue en a).



- (2) Si $f(t)$ est l'abscisse d'un point mobile se déplaçant sur un axe rectiligne, alors $\tau_a(t)$ est la vitesse moyenne entre les instants a et t et $f'(a)$ est la vitesse instantanée en a .

- (3) Supposons que $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \pm\infty$ et $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$ (continuité de f en a). Dans ce cas, f n'est pas dérivable en a mais on peut dire que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en $A(a, f(a))$. En effet, la droite verticale d'équation $x = a$ est la *position limite* des sécantes (AM) lorsque t tend vers a (et M tend vers A d'après la deuxième hypothèse). C'est le cas de la fonction racine carrée $\sqrt{\cdot}$ en 0.



Théorème I.2 (Caractérisation de la dérivabilité - Approximation affine). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si il existe une fonction affine $t \mapsto \alpha t + \beta$ et une fonction $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$ et :

$$(\star) \quad \forall t \in I, f(t) = \alpha t + \beta + (t - a)\varepsilon(t).$$

On a alors $\alpha = f'(a)$ et $\beta = f(a) - af'(a)$ et l'égalité $(\star)$ est appelée développement limité de f en a à l'ordre 1 :

$$\boxed{\forall t \in I, f(t) = f(a) + f'(a)(t - a) + (t - a)\varepsilon(t)}.$$

On écrit aussi, au voisinage de a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} f(a) + f'(a)(t - a) + o(t - a).$$

Cette égalité fournit une approximation locale de f par la fonction affine $t \mapsto \alpha t + \beta$ dont le graphe est la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a .

Corollaire I.1.3. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

En fait, les dérivabilités à gauche et à droite suffisent, même si les dérivées à gauche et à droite sont différentes.

Remarque. (1) On ne rappelle ni les dérivabilités et dérivées des fonctions usuelles ni les règles d'opérations entre fonctions dérivables : combinaison linéaire, produit, quotient, composée, réciproque.

- (2) Ces définitions et propriétés s'étendent au cas des fonctions à valeurs complexes. En revanche, on n'a plus les interprétations géométriques et cinématiques. On rappelle que, pour une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable sur I , on a : $f' = (\operatorname{Re}(f))' + i(\operatorname{Im}(f))'$.

Exercice I.1.4. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Théorèmes de Rolle et des accroissements finis

⚠ Les résultats énoncés dans cette partie ne s'appliquent qu'à des **fonctions à valeurs réelles**.

Proposition I.2.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur I à valeurs réelles. Soit $a \in I$.

On suppose que a n'est pas une extrémité de I (a est intérieur à I).

Si f est dérivable en a et présente un extremum local en a (minimum ou maximum local), alors $f'(a) = 0$.

En général, un réel a tel que $f'(a) = 0$ est appelé point critique de f .

Remarque. ⚠

(1) Une fonction non dérivable en a peut présenter un extremum en a ($f : x \mapsto |x|$ en 0 par exemple).

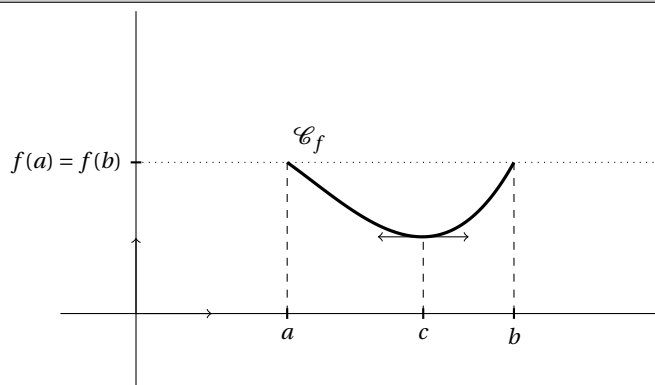
(2) Une fonction dérivable en a peut présenter un extremum en a avec $f'(a) \neq 0$:

$g : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ en $a = 0$ par exemple.

$x \longmapsto x$

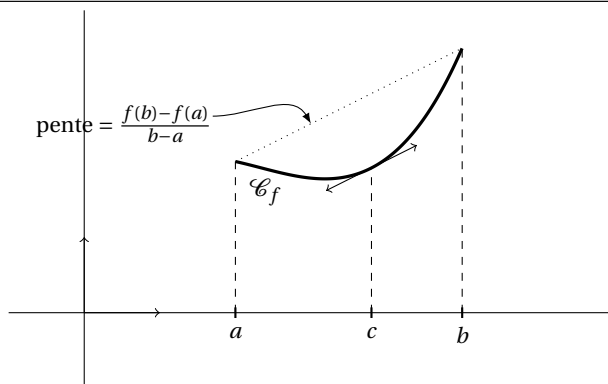
(3) Une fonction peut être dérivable en a avec $f'(a) = 0$ sans que f ne présente d'extremum local en a ($h : x \mapsto x^3$ en 0 par exemple).

Théorème I.6 (Rolle). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe $c \in]a; b[$ tel que $f'(c) = 0$.



Théorème I.7 (Théorème des accroissements finis). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.

Alors, il existe $c \in]a; b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ (c'est-à-dire $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$).



Corollaire I.2.8 (Inégalité des accroissements finis). Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction à valeurs réelles définie et continue sur $[a; b]$, dérivable sur $]a; b[$.

(1) S'il existe un réel m tel que $(\forall x \in]a; b[, m \leq f'(x))$, alors $m(b-a) \leq f(b) - f(a)$ (c'est-à-dire $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$).

(2) S'il existe un réel M tel que $(\forall x \in]a; b[, f'(x) \leq M)$, alors $f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ (c'est-à-dire $\frac{f(b) - f(a)}{b-a} \leq M$).

Si l'inégalité portant sur $f'(x)$ est stricte, alors l'inégalité portant sur $f(b) - f(a)$ est stricte également.

Remarque. ☺ On pourra utiliser ce résultat si f est dérivable sur $[a; b]$, ce qui sera très souvent le cas dans la pratique (et dans les hypothèses du corollaire ci-dessous).

Corollaire I.2.9 (Inégalité des accroissements finis). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I . Supposons qu'il existe un réel positif k tel que $(\forall x \in I, |f'(x)| \leq k)$.

Alors on a :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(y) - f(x)| \leq k|y - x|.$$

On dit alors que f est k -lipschitzienne sur I .

Dans le cas d'une fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , ce résultat est également valable. Il se démontre grâce à des intégrales.

Exemple I.2.10. Les fonctions sin et cos sont 1-lipschitziennes sur $\mathbb{R}$.

Remarque. ☺ À partir de ces résultats, on démontre tous les résultats reliant le signe de la fonction dérivée et la monotonie (éventuellement stricte) de la fonction. Ces résultats ne sont pas rappelés.

Exercice I.2.11. Étudier la monotonie de $\varphi : x \mapsto \cos(x) - x$.

Exercice I.2.12. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \cos(u_n)$.

(1) (a) Montrer que $I = [0; 1]$ est stable par $f : x \mapsto \cos(x)$ et contient u_2 .

(b) En déduire que $u_n \in I$ pour tout $n \geq 2$.

(2) Montrer que f possède un unique point fixe dans $[0; 1]$. On notera ℓ ce point fixe.

(3) Montrer que :

$$\forall n \geq 2, |u_{n+1} - \ell| = |f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{\sqrt{3}}{2} |u_n - \ell|.$$

(4) Montrer par récurrence que :

$$\forall n \geq 2, |u_n - \ell| \leq \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-2} |u_2 - \ell|.$$

Conclure quant à la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Théorème I.13 (Théorème de la limite de la dérivée). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$.

Si $f'(t)$ a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ quand t tend vers a , alors $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = \ell$.

Corollaire I.2.14. Sous les mêmes hypothèses que le théorème,

si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Corollaire I.2.15. Sous les mêmes hypothèses que le théorème,

si $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$, alors f n'est pas dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ admet en a une tangente verticale.

Corollaire I.2.16. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \overset{\circ}{I}$ (a n'est pas une extrémité de I).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur I et dérivable sur $I \setminus \{a\}$. Si f' admet en a des limites finies à gauche et à droite distinctes $\left(\lim_{a^-} f' = \ell_1 \neq \ell_2 = \lim_{a^+} f'\right)$, alors f n'est pas dérivable en a .

Plus précisément, $\mathcal{C}_f$ admet en a un point anguleux (deux demi-tangentes de pentes respectives ℓ_1 et ℓ_2).

Exercice I.2.17. (1) On note h la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\forall x \in I, h(x) = \begin{cases} \exp(\tan(x)) & \text{si } x \neq -\frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } x = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Étudier la dérivabilité de h sur I et expliciter h' .

(2) Considérons la fonction $g : x \mapsto \arcsin(1 - x^2)$.

Étudier la continuité et la dérivabilité de g en tout point de son domaine de définition.

3) Dérivées d'ordre supérieur

Définition I.3.18. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur I . On note $f^{(0)} = f$.

On note $f^{(1)} = f'$ et, pour tout $n \in \llbracket 2; +\infty \rrbracket$, on note $f^{(n)}$ la dérivée, si elle existe, de $f^{(n-1)}$.

On dit alors que $f^{(n)}$ est la dérivée n -ième de f ou dérivée d'ordre n de f (si $n = 2$, on note $f'' = f^{(2)}$ et on dit dérivée seconde).

On note aussi $\frac{d^n f}{dt^n}(a)$ pour $f^{(n)}(a)$ (à la physicienne).

Définition I.3.19. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable sur I et si $f^{(n)}$ est continue sur I .
- Si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ou qu'elle est indéfiniment dérivable sur I ou dérivable à tout ordre sur I .

Ces définitions s'étendent au cas de fonctions à valeurs complexes.

Remarque. Les théorèmes généraux qui permettent de montrer *rapidement* qu'une fonction est dérivable n fois/de classe $\mathcal{C}^n$ /de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I sont les mêmes que pour la dérivabilité.

En revanche, le calcul explicite de la dérivée n -ième devient difficile dans le cas d'un quotient, d'une composée ou d'une réciproque. Souvent, on cherche *au brouillon* une forme générale de $f^{(n)}$ que l'on valide par une récurrence.

Exercice I.3.20. On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme P_n tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, f^{(n)}(x) = \begin{cases} P_n\left(\frac{1}{x}\right) \exp\left(\frac{-1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Proposition I.3.21 (Leibniz).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient f et g deux fonctions définies et n fois dérivables (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$) sur I .

Alors le produit fg est n fois dérivable (respectivement de classe $\mathcal{C}^n$) sur I et, si $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \left(= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)} \right),$$

égalité appelée formule de Leibniz.

4) Fonctions convexes

Définition I.4.22. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

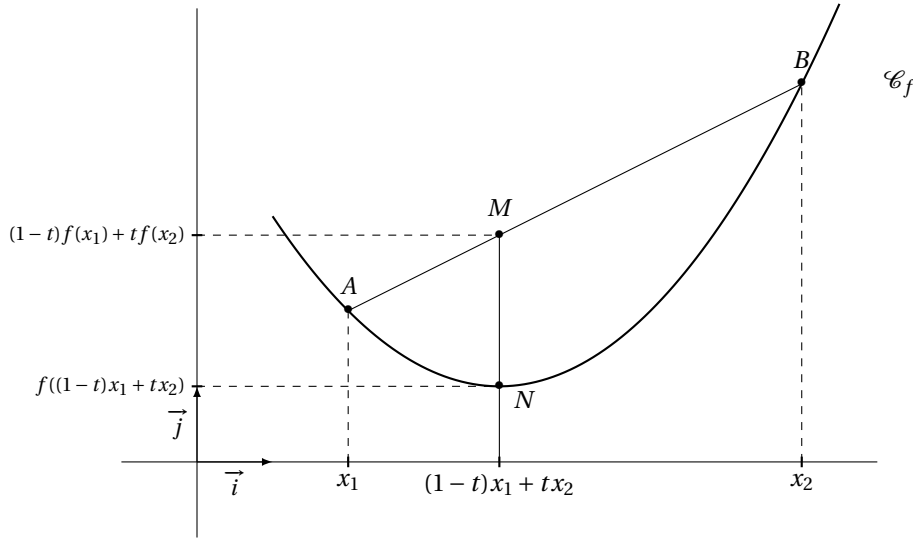
- On dit que f est convexe sur I si : $\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2)$.
- On dit que f est concave sur I si $-f$ est convexe sur I , c'est-à-dire :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall t \in [0; 1], f((1-t)x_1 + tx_2) \geq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Remarque. (1) On rappelle qu'on a la caractérisation suivante des segments :

$$[x_1; x_2] = \{x_1 + t(x_2 - x_1), t \in [0; 1]\} = \{(1-t)x_1 + tx_2, t \in [0; 1]\}.$$

La définition de la convexité de f traduit que la courbe représentative de f se trouve en dessous du segment $[AB]$ (segment appelé *corde* ou *sécante*).

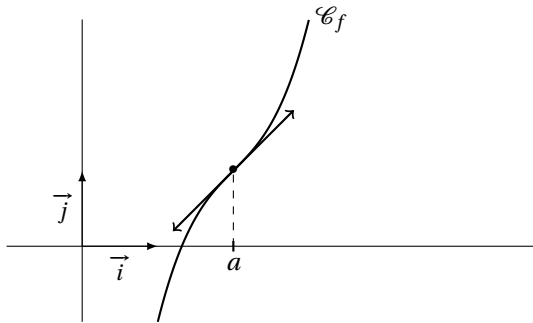


Proposition I.4.23. Supposons que f est une fonction dérivable sur I .

f est convexe sur I si et seulement si, pour tout $(x, a) \in I^2$, $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

Autrement dit, f est convexe sur I si et seulement si C_f est au-dessus de ses tangentes sur I .

Remarque. Un point a de I en lequel une fonction f change de concavité (convexe à gauche de a et concave à droite de a par exemple) est appelé point d'inflexion. En ce point, la courbe représentative de f traverse sa tangente.



Par exemple, les fonctions tan et sh présentent un point d'inflexion en 0.

Proposition I.4.24. Supposons que f est une fonction deux fois dérivable sur I .

f est convexe sur I si et seulement si $f'' \geq 0$ sur I .

II – Dérivabilité d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, toutes les fonctions seront supposées définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est parfois appelée *courbe paramétrée*, en référence aux cas $n = 2$ et $n = 3$.

Par exemple, considérons $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ et notons :

$$\forall t \in I, f(t) = (x(t), y(t)).$$

Si on munit le plan d'un repère orthonormé et qu'on note $M(t)$ le *point mobile* de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$, le point M décrit une trajectoire appelée *support* de la courbe paramétrée $t \mapsto f(t)$.

Pour tout $t \in I$, le *vecteur position* de M à l'instant t est $f(t)$.

Exemple II.0.1.

- (1) Soit $u : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle. Notons $f : t \mapsto (t, u(t))$.

Dans ce cas, la trajectoire de M est le graphe de la fonction u .

- (2) Notons $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, définie sur $I = \mathbb{R}$.

La trajectoire de M dans un repère orthonormé est le cercle trigonométrique.

On a le même support pour les courbes $g : t \mapsto (\cos(-t), \sin(-t))$ et $h : t \mapsto (\cos(2t), \sin(2t))$ mais ce sont pourtant des fonctions/courbes différentes.

- (3) Notons $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$, définie sur $I = \mathbb{R}$.

Dans un repère orthonormé de l'espace, comment imaginez-vous la trajectoire de M ?

1) Dérivabilité : définition, caractérisation, interprétation

On rappelle que $\mathbb{R}^n$ est de dimension finie donc **toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes**. Dans la suite du cours, on utilisera les notions de limite et de continuité sans préciser quelle est la norme utilisée.

Définition II.1.2. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $a \in I$.

- On dit que f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\tau_a(t) = \frac{1}{t-a}(f(t) - f(a))$ possède une limite (dans $\mathbb{R}^n$ donc) quand t tend vers a (ou si $\frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ possède une limite quand h tend vers 0).

Cette limite est alors notée $f'(a)$ et est appelée dérivée de f en a (noté aussi $\frac{df}{dt}(a)$).

- Si f est dérivable en tout point $a \in I$, on dit que f est dérivable sur I et on note f' la dérivée de f , c'est-à-dire la fonction $a \mapsto f'(a)$, définie sur I . On écrit généralement $t \mapsto f'(t)$.

Théorème II.3 (Caractérisation de la dérivabilité). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $a \in I$.

f est dérivable en a si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ et une fonction $\varepsilon : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telles que $\lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0_{\mathbb{R}^n}$ et :

$$(\star) \quad \forall t \in I, f(t) = f(a) + (t - a)\ell + (t - a)\varepsilon(t).$$

On a alors $\ell = f'(a)$ et l'égalité $(\star)$ est appelée développement limité de f en a à l'ordre 1 :

$$\forall t \in I, f(t) = f(a) + (t - a)f'(a) + (t - a)\varepsilon(t).$$

On écrit aussi, au voisinage de a :

$$f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} f(a) + (t - a)f'(a) + o(t - a).$$

Corollaire II.1.4. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $a \in I$.

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

Remarque (Interprétation cinématique).

On suppose que $n = 2$ ou $n = 3$. On suppose que f est dérivable en a et que $f'(a) \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.

On munit l'espace à n dimensions d'un repère orthonormé. On note A le point de coordonnées $f(a)$.

On appelle *tangente en A à la courbe paramétrée $t \mapsto f(t)$ (ou à son support)* la droite passant par A et dirigée par le vecteur $f'(a)$ (également appelé *vecteur vitesse*, c'est la dérivée en a du vecteur position $f(t)$).

Théorème II.5 (Caractérisation de la dérivabilité par les fonctions coordonnées). 

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $a \in I$.

On note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions-coordonnées de f (fonctions réelles) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall t \in I, f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

(1) f est dérivable en a si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_k est dérivable en a . Dans ce cas :

$$f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a)).$$

(2) f est dérivable sur I si et seulement si, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, f_k est dérivable sur I .

Exemple II.1.6. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur I .

Démontrer que f est constante sur I si et seulement si f' est identiquement nulle sur I .

Exercice II.1.7. On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle. Notons $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$, définie sur $I = \mathbb{R}$.

Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux. Interpréter géométriquement.

2) Fonctions dérivables et opérations

Proposition II.2.8 (Linéarité de la dérivation). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $g : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

(1) Si f et g sont dérivables en a , alors $f + \lambda g$ est dérivable en a et $(f + \lambda g)'(a) = f'(a) + \lambda g'(a)$.

(2) Si f et g sont dérivables sur I , alors $f + \lambda g$ est dérivable sur I .

En particulier, l'ensemble des fonctions $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$ et l'application $f \mapsto f'$ est linéaire.

Proposition II.2.9 (Composition avec une fonction réelle). Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : J \longrightarrow I$. Si φ est dérivable sur J et f est dérivable sur I , alors $f \circ \varphi : J \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est dérivable sur J et :

$$\forall a \in J, (f \circ \varphi)'(a) = \varphi'(a) \cdot f'(\varphi(a)).$$

Proposition II.2.10. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit u une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si f est dérivable sur I , alors $u \circ f$ est dérivable sur I et :

$$\forall a \in I, (u \circ f)'(a) = u(f'(a)).$$

Exercice II.2.11. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On cherche à résoudre le système différentiel $\boxed{X' = AX}$,

c'est-à-dire trouver toutes les fonctions $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$ dérivables sur $\mathbb{R}$ et telles que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, X'(t) = AX(t),$$

c'est-à-dire

$$\forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x'(t) = & y(t) + z(t) \\ y'(t) = x(t) & z(t) \\ z'(t) = x(t) + y(t) \end{cases}$$

(1) Diagonaliser la matrice A . On donnera une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

(2) Soit $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On note alors $Y : t \mapsto P^{-1}X(t)$.

(a) Montrer que X est solution de $X' = AX$ si et seulement si Y est solution du système différentiel $Y' = DY$.

(b) Trouver toutes les fonctions Y solutions du système différentiel $Y' = DY$.

(3) Donner toutes les solutions du système différentiel $X' = AX$.

On exprimera l'ensemble des solutions comme un espace vectoriel engendré par trois fonctions vectorielles.

Proposition II.2.12 (ADMIS).

(1) Soient a, b et c dans $\mathbb{N}^*$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^a$. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^b$. Soit $B : \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^c$ une application **bilinéaire**.

On note $u : I \rightarrow \mathbb{R}^c$ définie par :

$$\forall t \in I, u(t) = B(f(t), g(t)).$$

Si f et g sont dérivables sur I , alors u est dérivable sur I et :

$$\forall a \in I, u'(a) = B(f'(a), g(a)) + B(f(a), g'(a)).$$

(2) Soit $p \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soient $a_1, \dots, a_p$ dans $\mathbb{N}^*$. Soit $c \in \mathbb{N}^*$. Soient des fonctions $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^{a_1}, \dots, f_p : I \rightarrow \mathbb{R}^{a_p}$. Soit $M : \mathbb{R}^{a_1} \times \dots \times \mathbb{R}^{a_p} \rightarrow \mathbb{R}^c$ une application **p -linéaire**. On note $u : I \rightarrow \mathbb{R}^c$ définie par :

$$\forall t \in I, u(t) = M(f_1(t), \dots, f_p(t)).$$

Si $f_1, \dots, f_p$ sont dérivables sur I , alors u est dérivable sur I et :

$$\forall a \in I, u'(a) = M(f_1'(a), f_2(a), \dots, f_p(a)) + M(f_1(a), f_2'(a), \dots, f_p(a)) + \dots + M(f_1(a), f_2(a), \dots, f_p'(a)).$$

Exemple II.2.13 (Exemples fondamentaux). 

(1) **Produit scalaire.**

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Soient f et g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}^n$ dérivables sur I .

(a) On note $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I, u(t) = \langle f(t), g(t) \rangle.$$

La fonction u est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, u'(t) = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle.$$

(b) On note $U : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I, U(t) = \|f(t)\|^2.$$

La fonction U est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, U'(t) = 2\langle f'(t), f(t) \rangle.$$

Exercice II.2.14. On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne usuelle. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable sur I .

Montrer que f est de norme constante sur I si et seulement si $f'(t)$ et $f(t)$ sont orthogonaux pour tout $t \in I$.

(2) **Déterminant.**

(a) On munit $\mathbb{R}^n$ d'une base $\mathcal{B}$. Soient des fonctions $f_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables sur I .

On note $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in I, u(t) = \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

La fonction u est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, u'(t) = \sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_i'(t), \dots, f_n(t)).$$

(b) Soient des fonctions $C_1 : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \dots, C_n : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivables sur I .

On construit alors l'application $\Delta : t \mapsto \det(A(t)) = \begin{vmatrix} C_1(t) & C_2(t) & \dots & C_n(t) \end{vmatrix}$

où $A(t)$ est la matrice carrée dont les colonnes sont $C_1(t), \dots, C_n(t)$. La fonction Δ est dérivable sur I et :

$$\forall t \in I, \Delta'(t) = \begin{vmatrix} C_1'(t) & C_2(t) & \dots & C_n(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} C_1(t) & C_2'(t) & \dots & C_n(t) \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} C_1(t) & C_2(t) & \dots & C_n'(t) \end{vmatrix}.$$

Exercice II.2.15. Soient a, b et c trois réels. On note D la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, D(t) = \begin{vmatrix} \cos(t+a) & \sin(t+a) & \sin(b-c) \\ \cos(t+b) & \sin(t+b) & \sin(c-a) \\ \cos(t+c) & \sin(t+c) & \sin(a-b) \end{vmatrix}.$$

Montrer que D est constante et calculer $D(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

3) Dérivées d'ordre supérieur

Définition II.3.16. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable sur I . On note $f^{(0)} = f$.

On note $f^{(1)} = f'$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{(n)}$ la dérivée, si elle existe, de $f^{(n-1)}$.

On dit alors que $f^{(n)}$ est la dérivée n -ième de f ou dérivée d'ordre n de f (si $n = 2$, on note $f'' = f^{(2)}$ et on dit dérivée seconde).

On note aussi $\frac{d^n f}{dt^n}(a)$ pour $f^{(n)}(a)$ (à la physicienne).

Remarque. Dans le cas où $f(t)$ est le vecteur position d'un point mobile du plan ou de l'espace ($n = 2$ ou $n = 3$), $f''(a)$ est appelé vecteur accélération à l'instant a .

Définition II.3.17. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- On dit que f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I si f est p fois dérivable sur I et si $f^{(p)}$ est continue sur I .
- Si f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I ou qu'elle est indéfiniment dérivable sur I ou dérivable à tout ordre sur I .

Théorème II.18 (Caractérisation par les fonctions coordonnées). Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On note $f_1, \dots, f_n$ les fonctions-coordonnées de f (fonctions réelles) dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$:

$$\forall t \in I, f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)).$$

f est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I si et seulement si, pour tout $k \in \mathbb{N}$, f_k est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I . Dans ce cas, si $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall a \in I, f^{(p)}(a) = (f_1^{(p)}(a), \dots, f_n^{(p)}(a)).$$

Proposition II.3.19. Soit $p \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Si f et g sont de classe $\mathcal{C}^p$ sur I , alors $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^p$ sur I . On a alors, si $p \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall a \in I, (f + \lambda g)^{(p)}(a) = f^{(p)}(a) + \lambda g^{(p)}(a).$$

En particulier, l'ensemble $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ des fonctions $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^p$ sur I est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}^n)$.