

On rappelle un résultat de continuité énoncé dans le chapitre *Espaces vectoriels normés*.

Théorème .1. Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels normés de dimension finie.

Soit F un espace vectoriel normé.

(1) Si u est une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F , alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que :

$$\forall (x, y) \in E_1 \times E_2, \|u(x, y)\|_F \leq k \|x\|_{E_1} \times \|y\|_{E_2}.$$

(2) Toute application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F est continue sur $E_1 \times E_2$.

Ce résultat s'énonce et se démontrerait de manière analogue dans le cas d'une application n -linéaire sur un produit d'espaces vectoriels normés de dimension finie.

Démonstration. (1) Soit u une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F .

On note $n_1 = \dim(E_1)$, $n_2 = \dim(E_2)$ et on munit respectivement E_1 et E_2 de bases $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_{n_1})$ et $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_{n_2})$.

Pour tout $i \in \{1, 2\}$, on note N_i la norme infinie sur E_i relativement à la base $\mathcal{B}_i$:

par exemple, si $x = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i \in E_1$, on a $N_1(x) = \max_{1 \leq i \leq n_1} |x_i|$.

Soient $x = \sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i \in E_1$ et $y = \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j \in E_2$.

$$\begin{aligned} \|u(x, y)\|_F &= \left\| u \left(\sum_{i=1}^{n_1} x_i e_i, \sum_{j=1}^{n_2} y_j f_j \right) \right\|_F \\ &= \left\| \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} x_i y_j u(e_i, f_j) \right\|_F \quad (\text{bilinéarité de } u) \\ &\stackrel{i.t.}{\leq} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} |x_i| |y_j| \underbrace{\|u(e_i, f_j)\|_F}_{\geq 0} \\ &\stackrel{i.t.}{\leq} \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} N_1(x) N_2(y) \|u(e_i, f_j)\|_F \\ &\leq N_1(x) N_2(y) \underbrace{\sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \|u(e_i, f_j)\|_F}_{=k'} = k' N_1(x) N_2(y). \end{aligned}$$

Pour conclure, E_1 et E_2 sont de dimension finie donc $\|\cdot\|_{E_1}$ et N_1 sont équivalentes et $\|\cdot\|_{E_2}$ et N_2 sont équivalentes.

Il existe donc des réels strictement positifs α_1 et α_2 tels que $N_1 \leq \alpha_1 \|\cdot\|_{E_1}$ et $N_2 \leq \alpha_2 \|\cdot\|_{E_2}$. On conclut alors que :

$$\|u(x, y)\|_F \leq k' N_1(x) N_2(y) \leq \underbrace{k' \alpha_1 \alpha_2}_{=k} \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2} = k \|x\|_{E_1} \|y\|_{E_2},$$

ce qu'on voulait.

(2) Soit u une application bilinéaire de $E_1 \times E_2$ dans F .

$E_1 \times E_2$ est de dimension finie donc toutes les normes sur $E_1 \times E_2$ sont équivalentes. Munissons cet espace vectoriel d'une norme notée N .

Montrons la continuité de u de $(E_1 \times E_2, N)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$. Soit $(a, b) \in E_1 \times E_2$. Montrons que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = u(a, b)$.
Soit $(x, y) \in E_1 \times E_2$.

$$\begin{aligned} \|u(x, y) - u(a, b)\|_F &= \|u(x, y - b) + u(x - a, b)\|_F \\ &\stackrel{i.t.}{\leq} \|u(x, y - b)\|_F + \|u(x - a, b)\|_F \\ &\stackrel{(1)}{\leq} k \underbrace{\|x\|_{E_1}}_{\xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} \|a\|} \underbrace{\|y - b\|_{E_2}}_{\xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0} + k \underbrace{\|x - a\|_{E_1}}_{\xrightarrow{(x,y) \rightarrow (a,b)} 0} \underbrace{\|b\|_{E_2}}_{=cte} \end{aligned}$$

car les applications $(x, y) \mapsto x$ de $E_1 \times E_2$ dans E_1 et $(x, y) \mapsto y$ de $E_1 \times E_2$ dans E_2 sont linéaires sur un espace de dimension finie donc sont continues et les applications $\|\cdot\|_{E_i}$ sont continues sur E_i (car 1-lipschitzienne). Par opérations et par le théorème des gendarmes, on déduit de la majoration ci-dessus que $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} u(x, y) = u(a, b)$ et donc que u est continue en (a, b) et donc sur $E_1 \times E_2$.

□

Démontrons maintenant le résultat suivant qui se généralise au cas d'une application n -linéaire.

Théorème .2.

Soient a, b et c dans $\mathbb{N}^*$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^a$. Soit $g : I \rightarrow \mathbb{R}^b$. Soit $B : \mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b \rightarrow \mathbb{R}^c$ une application **bilinéaire**.

On note $u : I \rightarrow \mathbb{R}^c$ définie par :

$$\forall t \in I, u(t) = B(f(t), g(t)).$$

Si f et g sont dérivables sur I , alors u est dérivable sur I et :

$$\forall t_0 \in I, u'(t_0) = B(f'(t_0), g(t_0)) + B(f(t_0), g'(t_0)).$$

Démonstration. Tous les espaces étant de dimension finie, on ne précisera pas les normes utilisées (elles sont toutes équivalentes). Supposons f et g dérivables sur I .

- Commençons par montrer que, si $u : I \rightarrow \mathbb{R}^a$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}^b$ sont deux applications continues en $t_0 \in I$, alors $\varphi : t \mapsto (u(t), v(t))$ (de I dans $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$) est continue en t_0 .

Soit $t_0 \in I$. Soient $u : I \rightarrow \mathbb{R}^a$ et $v : I \rightarrow \mathbb{R}^b$ continues en t_0 . Notons $u_1, \dots, u_a$ les fonctions-coordonnées de u dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_a)$ de $\mathbb{R}^a$, qui sont donc continues en t_0 . De même, les fonctions-coordonnées $v_1, \dots, v_b$ de v dans la base canonique $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_b)$ de $\mathbb{R}^b$, sont continues en t_0 . Ces fonctions sont les fonctions-coordonnées de φ dans la base $((e_1, 0_{\mathbb{R}^b}), \dots, (e_a, 0_{\mathbb{R}^b}), (0_{\mathbb{R}^a}, e'_1), \dots, (0_{\mathbb{R}^a}, e'_b))$ de $\mathbb{R}^a \times \mathbb{R}^b$ donc φ est continue en t_0 .

- Soit $t_0 \in I$. Soit $t \in I \setminus \{t_0\}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{t - t_0} (u(t) - u(t_0)) &= \frac{1}{t - t_0} (B(f(t), g(t)) - B(f(t_0), g(t_0))) \\ &= \frac{1}{t - t_0} (B(f(t), g(t)) - \underbrace{B(f(t), g(t_0)) + B(f(t), g(t_0))}_{=0} - B(f(t_0), g(t_0))) \\ &= \frac{1}{t - t_0} (B(f(t), g(t) - g(t_0)) + B(f(t) - f(t_0), g(t_0))) \\ &= B\left(f(t), \frac{1}{t - t_0} (g(t) - g(t_0))\right) + B\left(\frac{1}{t - t_0} (f(t) - f(t_0)), g(t_0)\right) \xrightarrow{t \rightarrow t_0} B(f(t_0), g'(t_0)) + B(f'(t_0), g(t_0)) \end{aligned}$$

par continuité de f en t_0 (car dérivable), par dérivabilité de f et g en t_0 , par continuité de φ en t_0 (voir le premier point avec $u = f$ et $v : t \mapsto \frac{1}{t-t_0}(g(t) - g(t_0))$ (prolongée par continuité en t_0) puis $u : t \mapsto \frac{1}{t-t_0}(g(t) - g(t_0))$ (prolongée par continuité en t_0) et $v = g(t_0) = cte$) et enfin par continuité de B (bilinéaire sur un espace de dimension finie).

D'où le résultat.

□