

Chapitre 15 - Fonctions de plusieurs variables

Dans ce chapitre, on désigne par n et p des entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

Les fonctions étudiées seront des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Dans la pratique, on se limitera aux cas $p = 2$ et $p = 3$, c'est-à-dire à l'étude de fonctions de 2 ou 3 variables.

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est de dimension finie. Toutes les normes étant équivalentes, la plupart des définitions et résultats ne mentionneront pas la norme utilisée.

Toutefois, pour des motivations liées à la géométrie, on munira toujours $\mathbb{R}^p$ de sa structure euclidienne canonique. Le produit scalaire sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et la norme euclidienne associée $\| \cdot \|$.

Toujours dans l'idée de représenter les objets dans un repère (du plan ou de l'espace), les éléments de $\mathbb{R}^p$ seront considérés parfois comme des points, parfois comme des vecteurs. Pour éviter les confusions, certains vecteurs seront notés avec une flèche. Par exemple, on notera $\mathcal{B}_0 = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

I – Fonctions de plusieurs variables

1) Le cas particulier $p = 2$

Définition I.1.1. Soit f une fonction définie sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) \end{aligned}.$$

Soit $a = (\alpha, \beta)$ un point de D . Soit $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

On appelle application partielle associée à f en a suivant le vecteur $\vec{v}$ la fonction

$$\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v}) = f(\alpha + tv_1, \beta + tv_2).$$

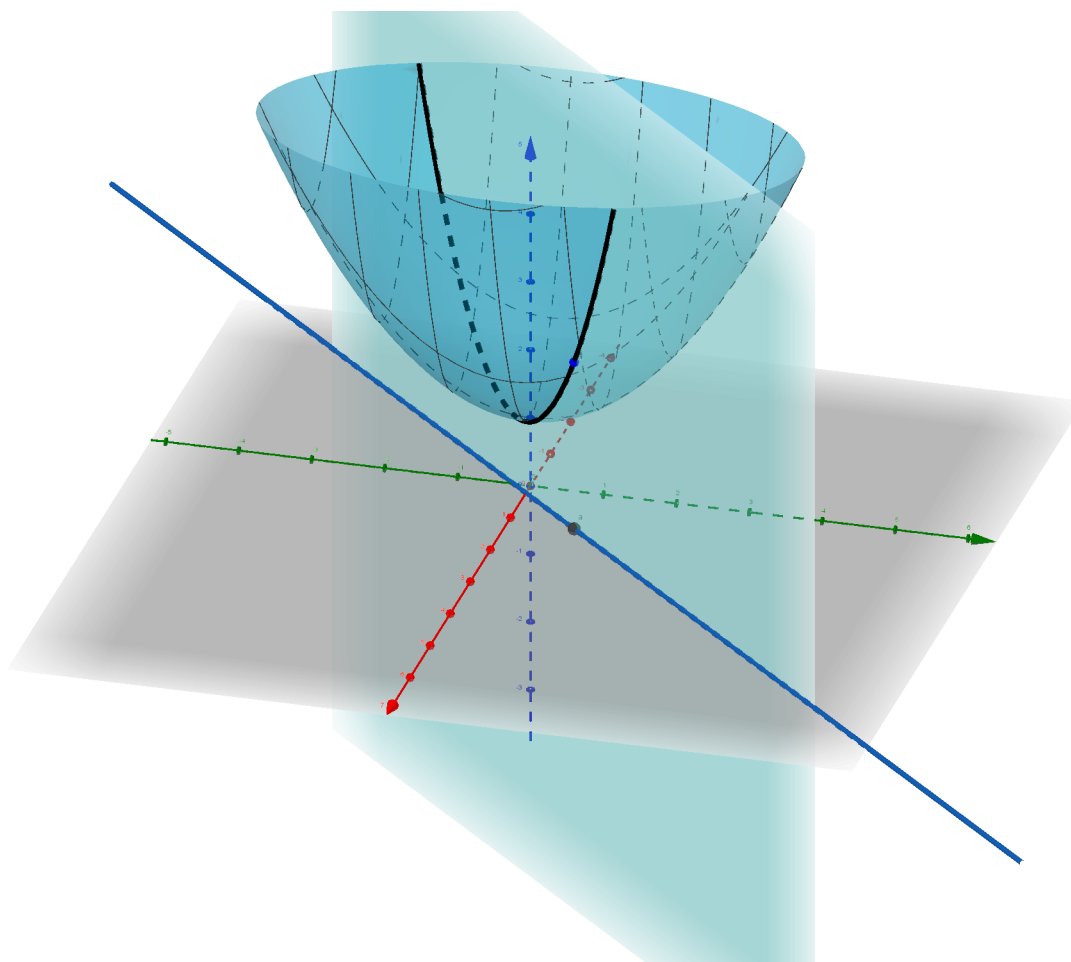
Remarque. (1) En étudiant une telle fonction, on étudie aussi le comportement de $f(x, y)$ lorsque (x, y) appartient à une droite (passant par $a = (\alpha, \beta)$ et dirigée par $\vec{v}$), le nombre $\varphi_{\vec{v}}(0)$ étant la valeur de f en a .

(2) Puisque D est un ouvert, la fonction $\varphi_{\vec{v}}$ est définie sur un intervalle de la forme $] -\varepsilon; \varepsilon[$, autrement dit est définie au voisinage de 0. Cette remarque sera fondamentale pour définir les dérivées partielles.

(3) On peut citer les cas particuliers des applications $f_1 = \varphi_{\vec{e}_1}$ et $f_2 = \varphi_{\vec{e}_2}$. Par exemple, $f_1 : t \mapsto f(\alpha + t, \beta)$ est induite par f en fixant la deuxième variable et en ne faisant *varier* que la première.

Remarque. (1) On pourra utiliser Geogebra pour observer la représentation graphique de la fonction f . Dans un repère (toujours choisi orthonormé) de l'espace, il s'agit de l'ensemble des points de coordonnées $(x, y, f(x, y))$, pour (x, y) dans D , ensemble de points que l'on peut imaginer comme une *surface*, une *nappe*, ...

Les applications partielles sont des fonctions d'une seule variable et on pourra leur appliquer tous les résultats développés depuis l'année dernière. On obtiendrait leur représentation graphique (malheureusement pas dans un repère orthonormé) en intersectant le graphe de f par un plan *vertical* bien choisi.



Exemple I.1.2. Considérons $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$, définie sur $\mathbb{R}^2$. Notons $a = (0, 1)$. Notons $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Les applications f_1 , f_2 et $\varphi_{\vec{v}}$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et on a : $f_1 : t \mapsto$, $f_2 : t \mapsto$, $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto$.

2) Cas général - Applications partielles

Définition I.2.3. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ un point de Ω . Notons $\vec{v} = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

On appelle application partielle associée à f en a suivant le vecteur $\vec{v}$ la fonction

$$\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v}) = f(\alpha_1 + tv_1, \dots, \alpha_p + tv_p).$$

Par exemple, pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $\varphi_{e_i}(t) = f(\alpha_1, \dots, \alpha_i + t, \dots, \alpha_p)$ au voisinage de 0 (toutes les variables sont supposées constantes sauf la i^{e}).

Remarque. (1) Puisque Ω est un ouvert, il existe $R > 0$ tel que la fonction f soit bien définie sur la boule ouverte de centre a et de rayon R et donc que toutes les fonctions $\varphi_{\vec{v}}$ soient définies sur un intervalle de la forme $] -\varepsilon; \varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$).

(2) En étudiant la fonction $\varphi_{\vec{v}}$, on étudie le comportement de $f(x_1, \dots, x_p)$ lorsque $(x_1, \dots, x_p)$ appartient à une droite (passant par a et dirigée par $\vec{v}$), le nombre $\varphi_{\vec{v}}(0)$ étant la valeur de f en a .

3) Rappels sur la continuité

Dans le cadre général des *Espaces vectoriels normés*, la notion de continuité a déjà été définie et étudiée. On ne rappelle ici ni les définitions de limite et de continuité, ni la caractérisation séquentielle, ni les théorèmes généraux (sur les combinaisons linéaires, produits, quotients, compositions de fonctions continues). Nous allons présenter des éléments de méthodologie et des exemples de continuité ou de non-continuité dans le cadre des fonctions de plusieurs variables.

a. Comment montrer la continuité ?

On rappelle que les fonctions $(x, y) \mapsto x$, $(x, y) \mapsto y$, $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1, \dots$ ainsi que toute fonction polynomiale (à plusieurs variables) est continue sur son ensemble de définition. On pourra donc souvent écrire, en justifiant éventuellement qu'un dénominateur ne s'annule pas ou qu'une expression sous une racine carrée est positive, etc :

 Par opérations, f est continue sur ...

Exemple I.3.4. (1) Par opérations, $f : (x, y) \mapsto \frac{e^{x+y} + \cos(xy)}{\ln(2 + x^2 y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ ($2 + x^2 y^2 > 1$ donc le dénominateur est bien défini et ne s'annule pas) ;

(2) Par opérations, $f : (x, y, z) \mapsto \frac{xy}{z}$ est continue sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0), (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$;

(3) Par opérations, $f : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Lorsque les théorèmes généraux ne suffisent pas à obtenir la continuité (en un ou quelques points en général), on montre *à la main* la continuité en $a = (\alpha, \beta)$: $\lim_{(x,y) \rightarrow (\alpha,\beta)} |f(x, y) - f(a)| = 0$?

 On peut obtenir une telle limite par encadrement/majoration, en utilisant parfois une des inégalités classiques ci-dessous (à savoir redémontrer) :

- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$ et $|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|xy| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$;
- $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $|x \pm y| \leq |x| + |y| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$.



Pour les fonctions de deux variables, on peut aussi trouver une fonction $u :]0; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{r \rightarrow 0} u(r) = 0$ et :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall r > 0, |f(\alpha + r \cos(\theta), \beta + r \sin(\theta)) - f(\alpha, \beta)| \leq \underbrace{u(r)}_{\text{indpdt de } \theta}.$$

Cela revient à écrire (x, y) en coordonnées polaires.

Exemple I.3.5. (1) Montrer que la fonction f définie ci-dessous est continue sur $\mathbb{R}^2$:

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

On aurait pu rédiger l'énoncé différemment :

On note $f : (x, y) \mapsto \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que f est continue sur son domaine de définition et que f peut être prolongée par continuité en $(0, 0)$.

(2) On note $f : (x, y) \mapsto \frac{x^3 + y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Montrer que f peut être prolongée par continuité en $(0, 0)$.

b. Comment montrer la non-continuité ?

Proposition I.3.6. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}.$$

Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p)$ un point de Ω . Notons $\vec{v} = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

On suppose que f est continue en a : $\lim_{X \rightarrow a} f(X) = f(a)$.

- (1) Pour toute suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω qui converge vers a , la suite $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.
- (2) Pour toute fonction $u : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ telle que $\lim_{t \rightarrow t_0} u(t) = a$, on a $\lim_{t \rightarrow t_0} f(u(t)) = f(a)$.
- (3) L'application partielle $\varphi_{\vec{v}}$ associée à f en a suivant le vecteur $\vec{v}$ est continue en 0 : $\lim_{t \rightarrow 0} f(a + t \vec{v}) = f(a)$.



La continuité en 0 des applications partielles est une condition **nécessaire** de la continuité de f en a . Savoir que les applications partielles sont continues ne démontre RIEN sur la continuité de f !

Méthode.

- (1) Pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en a , il suffit de trouver une application partielle suivant un vecteur qui n'admet pas $f(a)$ pour limite en 0.
- (2) On peut également trouver une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers a et telle que $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers $f(a)$ (ou une fonction u qui tend vers a en t_0 telle que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(u(t)) \neq f(a)$).
Ces approches permettent d'approcher a par des chemins plus originaux qu'une droite.

Remarque. On peut utiliser le même type de méthode pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $a \in \overline{\Omega}$.

- (1) Pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en a , il suffit de trouver deux fonctions u et v qui tendent vers a en t_0 et telles que $\lim_{t \rightarrow t_0} f(u(t)) \neq \lim_{t \rightarrow t_0} f(v(t))$.
- (2) On peut également trouver deux suites $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui convergent vers a et telles que $(f(X_n))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(f(Y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ aient des limites différentes.

Exemple I.3.7. (1) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

(2) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Montrer que f n'est pas continue en $(0, 0)$.

(3) Montrer que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) + z^3$ n'a pas de limite en $(0, 0, 0)$.

(4) Montrer que la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2}$ ne peut pas être prolongée par continuité en $(0, 0, 0)$.

La notion de *limite infinie* n'est pas au programme mais elle pourrait tout à fait être définie dans ce contexte (fonctions à valeurs réelles!), avec les mêmes propriétés que dans le cadre des fonctions d'une variable.

Remarque. Définir les fonctions sur un ouvert a permis de définir les applications partielles au voisinage de 0.

Ceci sera indispensable dans les parties suivantes (pour dériver les applications partielles) alors que la notion de continuité s'accommoderait très bien d'un ensemble de définition non ouvert.

Par exemple, on terminera en fin de chapitre l'exercice suivant.

Exercice I.3.8. On veut déterminer les extremums sur $C = [0; \pi] \times [0; \pi]$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$. Justifier que f admet un maximum et un minimum sur C .

II – Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

1) Dérivées partielles

Définition II.1.1 (Dérivées partielles d'ordre 1).

Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} f : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned} .$$

Soit $a = (a_1, \dots, a_p)$ un point de Ω . Notons $\vec{v} = (v_1, \dots, v_p)$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$.

On rappelle qu'on note $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v})$ l'application partielle associée à f en a suivant le vecteur $\vec{v}$.

(1) Si $\varphi_{\vec{v}}$ est dérivable en 0, alors le nombre dérivé $\varphi'_{\vec{v}}(0)$ est appelé dérivée de f en a selon le vecteur $\vec{v}$ et se note $D_{\vec{v}}f(a)$.

(2) Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Si elle existe, on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ ou $\partial_i f(a)$ la dérivée de f en a selon le vecteur $\vec{e}_i$.

Cette dérivée est appelée i -ème dérivée partielle de f en a ou dérivée partielle de f par rapport à x_i en a .

(3) Si cette dérivée partielle est définie en tout point a de Ω ,

on définit sur Ω la fonction de plusieurs variables $\frac{\partial f}{\partial x_i} : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_p)$.

Remarque. (1) En général, pour calculer la i -ème dérivée partielle de f en a , on considère fixée toutes les autres variables et on dérive par rapport à la variable x_i . On peut alors dire :

$$\begin{array}{l} \text{✎} \quad \text{Par opérations, les dérivées partielles existent sur } \Omega \text{ et } \forall (x_1, \dots, x_p) \in \Omega, \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_p) = \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_p) = \dots \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_p) = \dots \end{array} \right. .$$

On ne revient à la définition que lorsque l'existence de la dérivée n'est pas immédiate (fonction définie par morceaux, comme un prolongement, ...).

(2) Pour calculer la dérivée suivant un vecteur quelconque, on revient à la définition en commençant par expliciter $\varphi_{\vec{v}}(t)$.

(3) Le calcul d'une dérivée de f en a suivant le vecteur $\vec{v}$ permet d'apprécier le comportement local de f au voisinage de a **mais seulement lorsque** $(x_1, \dots, x_p)$ **appartient à une droite** passant par a (et dirigée par le vecteur $\vec{v}$).

Exemple II.1.2. (1) Calculer les dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^3$.

(2) On définit sur $D =]0; +\infty[$ la fonction $f : (x, y, z) \mapsto \arctan\left(\frac{x}{yz}\right)$.

Calculer les dérivées partielles en tout point de D .

(3) On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

Montrer que f admet en $(0, 0)$ une dérivée selon tout vecteur.

On rappelle que cette fonction n'est pourtant même pas continue en $(0, 0)$...

Définition II.1.3. Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs réelles :

$$\begin{aligned} f: \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, \dots, x_p) &\longmapsto f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned} .$$

On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω si f admet en tout point $a \in \Omega$ une i -ème dérivée partielle pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ et si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont continues sur Ω (on rappelle que ce sont des fonctions de p variables).

Exemple II.1.4. (1) Les fonctions étudiées dans l'exemple précédent sont-elles de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition?

(2)  Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

2) Développement limité à l'ordre 1

Définition II.2.5 (Gradient).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Omega$.

On appelle gradient de f en a et on note $\nabla f(a)$ le vecteur $\nabla f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}$.

Théorème II.6 (ADMIS). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Omega$.

Il existe alors une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(h) = 0$ et, pour tout $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p$ de norme assez petite :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle h, \nabla f(a) \rangle + \varepsilon(h) \cdot \|h\| \\ &= f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \varepsilon(h) \cdot \|h\|, \end{aligned}$$

écriture appelée développement limité à l'ordre 1 de f en a .

On écrit également ce développement ainsi : $f(a+h) \underset{h \rightarrow (0, \dots, 0)}{=} f(a) + \langle h, \nabla f(a) \rangle + o(\|h\|)$ et, en identifiant $\mathbb{R}^p$ et $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$:

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow (0, \dots, 0)}{=} f(a) + h^T \cdot \nabla f(a) + o(\|h\|).$$

La notation $\dots = o(\|h\|)$ signifie que la limite de $\frac{\dots}{\|h\|}$ est nulle quand h tend vers $(0, \dots, 0)$.

Remarque. (1) On peut observer l'analogie avec le développement limité à l'ordre 1 d'une fonction réelle.

En effet, $h \mapsto \langle \nabla f(a), h \rangle = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i$ est une forme linéaire donc le développement limité ci-dessus permet

d'approcher localement la fonction f par une fonction qui est somme d'une constante et d'une application linéaire, fonction que l'on pourrait appeler **application affine...**

(2) Comme dans le cas des fonctions réelles, on peut montrer **l'unicité du développement limité** d'ordre 1. Il existe un unique vecteur $u \in \mathbb{R}^p$ tel que $f(a+h) \underset{h \rightarrow (0, \dots, 0)}{=} f(a) + \langle h, u \rangle + o(\|h\|)$, ce vecteur u est le gradient de f en a .

Exemple II.2.7. On note $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall a = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \|a\|^2 = x^2 + y^2$.

Déterminer le gradient de f en tout point a par deux méthodes : par un calcul direct et en écrivant le DL de f en a en calculant $f(a + h)$.

Corollaire II.2.8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Omega$.

(1) Alors f est continue sur Ω .

(2) Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_p \end{pmatrix}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^p$. La fonction f admet une dérivée en a selon le vecteur $\vec{v}$ et :

$$D_{\vec{v}} f(a) = \langle \vec{v}, \nabla f(a) \rangle = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot v_i.$$

Remarque. Supposons que $\nabla f(a) \neq 0$. Supposons également que $\vec{v}$ est normé.

D'après le dernier résultat, la dérivée suivant le vecteur $\vec{v}$ est maximale lorsque $\vec{v}$ est colinéaire à $\nabla f(a)$ et de même sens. On dit que le gradient *indique la ligne de plus grande pente*, c'est-à-dire que le gradient *montre la direction et le sens* dans lesquels f croît le plus vite au voisinage de a .

Définition II.2.9. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_p) \in \Omega$.

On appelle différentielle de f en a et on note $df(a)$ la forme linéaire :

$$df(a) : \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} \mapsto \langle h, \nabla f(a) \rangle = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i.$$

Pour ne pas surcharger les notations, on note usuellement $df(a) \cdot h$ plutôt que $(df(a))(h)$.

Remarque. Dans les cas des fonctions d'une seule variable ($p = 1$), que devient la notion de différentielle?

Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $a \in I$.

La dérivée partielle de f en a est $f'(a)$ donc la différentielle de f en a est la fonction linéaire $df(a) : h \mapsto f'(a)h$ et on retrouve le DL de f en a à l'ordre 1 :

$$f(a + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(a) + f'(a)h + o(\|h\|).$$

Proposition II.2.10 (Théorèmes généraux sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$). 

(1) Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$.

(a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

(b) Le produit fg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

(c) Si g ne s'annule pas sur Ω , le quotient $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

(2) Soient f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit u une fonction (d'une variable) de classe $\mathcal{C}^1$ sur I . Alors $u \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

Remarque. Souvent, pour justifier qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω , on pourra simplement écrire, en justifiant éventuellement qu'un dénominateur ne s'annule pas ou qu'une expression sous une racine carrée est **strictement positive**, etc :

 Par opérations, f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur ...

Les règles de calcul des dérivées partielles sont alors les mêmes que pour les fonctions d'une variable :

- $\frac{\partial(f + \lambda g)}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} + \lambda \frac{\partial g}{\partial x_i}$;
- $\frac{\partial(fg)}{\partial x_i} = g \frac{\partial f}{\partial x_i} + f \frac{\partial g}{\partial x_i}$;
- $\frac{\partial\left(\frac{f}{g}\right)}{\partial x_i} = \frac{1}{g^2} \left(g \frac{\partial f}{\partial x_i} - f \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)$;
- $\frac{\partial(u \circ f)}{\partial x_i} = (u' \circ f) \times \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

Exemple II.2.11. Justifier que la fonction $(x, y, z) \mapsto \frac{\sqrt{1+z^2} + \sin(xyz)}{1+x^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

3) Cas particulier $p = 2$ - Plan tangent

Corollaire II.3.12 (DL à l'ordre 1 dans le cas $p = 2$).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert D de $\mathbb{R}^2$. Soit $a = (\alpha, \beta) \in D$. On a alors :

$$f(a + (h, k)) \underset{(h,k) \rightarrow (0,0)}{=} f(a) + h \frac{\partial f}{\partial x}(a) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|(h, k)\|).$$

Remarque. 

On peut aussi écrire : il existe une fonction ε qui tend vers 0 en a et qui vérifie :

$$f(x, y) = f(a) + (x - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta) \frac{\partial f}{\partial y}(a) + \varepsilon(x, y) \|(x, y) - a\|,$$

ce qui permet d'approcher *localement* (au voisinage de a) la fonction f par la fonction

$$(x, y) \mapsto f(a) + (x - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta) \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

dont le graphe est un plan noté $\mathcal{P}$.

Le plan $\mathcal{P}$ est appelé *plan tangent à la courbe de f en a* et admet pour équation

$$z = f(a) + (x - \alpha) \frac{\partial f}{\partial x}(a) + (y - \beta) \frac{\partial f}{\partial y}(a).$$

En particulier, ce plan tangent est *horizontal* si et seulement si $\nabla f(a) = \vec{0}$.

III – Règle de la chaîne

Proposition III.0.1 (Règle de la chaîne). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$.

Soit $u : t \mapsto (u_1(t), \dots, u_p(t))$ définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que les fonctions u_i (appelées fonctions-coordonnées de u) soient de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $u(I) \subset \Omega$, de sorte qu'on puisse définir sur I la fonction

$$g = f \circ u : t \mapsto f(u_1(t), \dots, u_p(t)).$$

La fonction g est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $t \in I$:

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u(t)) \times u'_1(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u(t)) \times u'_p(t) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(u(t)) \times u'_i(t) \quad (= \langle \nabla f(u(t)), u'(t) \rangle).$$

Remarque. (1) Les physiciens écrivent couramment $\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} \times \frac{dx_p}{dt}$ mais la disparition des variables peut être source d'erreurs. En particulier, il ne faut pas oublier que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ doivent être évaluées en $u(t)$!

Les physiciens écrivent même $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \times \frac{dx_1}{dt} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p} \times \frac{dx_p}{dt}$ en notant de la même manière les fonctions f et g (normal, elles désignent la même grandeur physique mais en fonction de variables différentes!).

Nous n'irons pas jusque là ...

(2) Considérons le cas particulier $p = 2$.

Étudier l'**application partielle** $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v})$ (suivant un vecteur $\vec{v}$ non nul) permet d'étudier les variations de $f(x, y)$ lorsque (x, y) **parcourt la droite** passant par a et dirigée par $\vec{v}$.

Étudier les variations de **la fonction** $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ revient à étudier les variations des valeurs de $f(x, y)$ lorsque (x, y) **parcourt une trajectoire quelconque** paramétrée par $(x(t), y(t))$.

On pourra par exemple observer le cas d'une fonction $u : t \mapsto (x(t), y(t))$ telle que $u'(t) \perp \nabla f(u(t))$ pour tout $t \in I$.

La règle de la chaîne montre alors que $f(x, y)$ reste constante lorsque (x, y) parcourt la trajectoire paramétrée par la fonction u (en effet, $g'(t) = 0$ pour tout $t \in I$).

On observe alors ce qu'on appellera bientôt une **ligne de niveau**.

Exemple III.0.2. (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $g(t) = f(t^3 + 3, \cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$. On considère la fonction $g : x \mapsto f(x, x, x)$.

Exprimer sa dérivée en fonction des dérivées partielles de f (notées $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial f}{\partial z}$).

Corollaire III.0.3 (Règle de la chaîne : extension). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$.

Soit $u : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction à n variables notée ainsi :

$$u : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (u_1(t_1, \dots, t_n), \dots, u_p(t_1, \dots, t_n))$$

où les fonctions u_i (fonctions-coordonnées de u) sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert D de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On suppose que $u(D) \subset \Omega$, de sorte qu'on puisse définir sur D la fonction

$$g = f \circ u : (t_1, \dots, t_n) \mapsto f(u_1(t_1, \dots, t_n), \dots, u_p(t_1, \dots, t_n)).$$

La fonction g est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur D et ses dérivées partielles s'écrivent ainsi :

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \forall t = (t_1, \dots, t_n) \in D, \frac{\partial g}{\partial t_i}(t) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(u(t)) \times \frac{\partial u_1}{\partial t_i}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(u(t)) \times \frac{\partial u_p}{\partial t_i}(t) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(u(t)) \times \frac{\partial u_k}{\partial t_i}(t).$$

Cette formule est identique à la précédente si on fixe toutes les variables sauf t_i , alors considérée comme la seule variable.

Exemple III.0.4. (1) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(u, v) = f(uv, u^2 + v^2)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Exprimer les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial u}$ et $\frac{\partial h}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^3$.

Exprimer les dérivées partielles de la fonction $g_1 : (x, y) \mapsto f(y, x, xy)$ en fonction de celles de f .

Exercice III.0.5 (Équation aux dérivées partielles).

On cherche à déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ (équation notée (E)).

Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On note $g : (u, v) \mapsto f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right)$.

(1) Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, exprimer $f(x, y)$ en fonction de g .

(2) Supposons que f est solution de (E). Déterminer une équation aux dérivées partielles vérifiée par g .

En déduire toutes les solutions de (E).

Exercice III.0.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On note $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$ le gradient de f en (x, y) .

Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on note $\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix}$, $\vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$.

Les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ forment une base du repère polaire et la fonction g représente la même quantité que f mais en coordonnées polaires : $f(x, y) = g(r, \theta)$.

Un physicien noterait par la même notation les fonctions f et g puisqu'elles représentent la même quantité.

(1) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(2) Pour tout $r \neq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire $\frac{\partial f}{\partial x}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$.

(3) En déduire, pour tout $r \neq 0$ et tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\nabla f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) = \frac{\partial g}{\partial r}(r, \theta) \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta}(r, \theta) \vec{e}_\theta.$$

On parle d'expression du gradient en coordonnées polaires. Un physicien écrirait $\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$.

Proposition III.0.7 (Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe).

Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .

- (1) Si f est constante sur Ω alors toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont identiquement nulles sur Ω .
- (2) Si Ω est convexe et si toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont identiquement nulles sur Ω , alors f est constante sur Ω .

IV – Gradient et applications géométriques

1) Équation de la tangente à une courbe plane

Dans cette partie, on suppose que $p = 2$.

Les droites utilisées ici sont des ensembles de **points** du plan et pas des espaces vectoriels.

Définition IV.1.1 (Courbe plane - Ligne de niveau). Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$.

- (1) L'ensemble $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = 0\}$ est appelé courbe plane d'équation (cartésienne) $f(x, y) = 0$.

On confond généralement une courbe ainsi définie avec sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

- (2) On appelle ligne de niveau de f toute courbe plane d'équation $f(x, y) = \lambda$ où λ est un réel fixé.

Exemple IV.1.2. (1) Les lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto 3x + 2y$ sont des droites.

- (2) Les lignes de niveau de la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont soit l'ensemble vide, soit réduite à un point, soit un cercle de centre $(0, 0)$.

Définition - Théorème IV.1.3.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{E}$ la courbe plane d'équation $f(x, y) = 0$.

Soit $a = (\alpha, \beta) \in \mathcal{E}$.

- On dit que a est un point régulier de la courbe $\mathcal{E}$ si le gradient de f en a n'est pas le vecteur nul ($\nabla f(a) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).
- [ADMIS] Si a est régulier, il existe $r > 0$ et une fonction $M : t \mapsto (x(t), y(t))$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ telle que l'image de I par M soit $\mathcal{E} \cap B(a, r)$ et, pour tout $t \in I$, $M'(t) \neq (0, 0)$.

Autrement dit, lorsque t parcourt l'intervalle I , le point mobile repéré par $M(t)$ a une vitesse non nulle et parcourt la partie de la courbe $\mathcal{E}$ au voisinage de a . On dit que M est un paramétrage local régulier de la courbe au voisinage de a .

- Si a est un point régulier, la courbe $\mathcal{E}$ admet une tangente en a et le gradient de f en a est orthogonal à la tangente en a à $\mathcal{E}$. Une équation de cette tangente est alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - \alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - \beta) = 0.$$

Remarque. ✌ Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \Omega$.

Le résultat précédent permet de dire que, lorsque le gradient en a est non nul, il est orthogonal à la tangente en a à la ligne de niveau d'équation $f(x, y) = f(a)$ (celle qui passe par a). Dans ce cas, on dit simplement que *le gradient est orthogonal à la ligne de niveau*.

Cette information donne la direction du gradient. Pour compléter, on rappelle que le sens du gradient est donné par les valeurs croissantes de f , interprétation déjà évoquée plus haut.

Exercice IV.1.4. On considère le cercle trigonométrique. Déterminer une équation de la tangente au cercle en $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2) Plan tangent à une surface

Dans cette partie, on suppose que $p = 3$.

Les droites et plans utilisés ici sont des ensembles de **points** de l'espace et pas des espaces vectoriels.

Définition IV.2.5 (Surface). Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$.

L'ensemble $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \Omega \mid f(x, y, z) = 0\}$ est appelé surface d'équation (cartésienne) $f(x, y, z) = 0$.

On confond généralement une surface ainsi définie avec sa représentation graphique dans un repère orthonormé de l'espace.

Exemple IV.2.6.

- (1) S'il existe $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ tel que $f : (x, y, z) \mapsto ax + by + cz + d$, alors la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$ est un plan.
- (2) Si $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ et λ est un réel, la surface d'équation $f(x, y, z) = \lambda$ est soit vide, soit réduite à un point, soit une sphère de centre $(0, 0, 0)$.

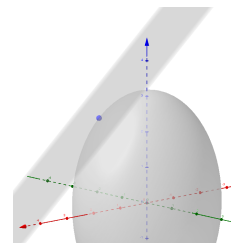
Définition IV.2.7. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$.

Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$.

Soit $a = (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{S}$.

- (1) On dit que a est un point régulier de la surface $\mathcal{S}$ si le gradient de f en a n'est pas le vecteur nul ($\nabla f(a) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).
- (2) Si a est un point régulier, on appelle plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en a le plan passant par a dont un vecteur normal est $\nabla f(a)$. Ce plan admet pour équation :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot (x - \alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot (y - \beta) + \frac{\partial f}{\partial z}(a) \cdot (z - \gamma) = 0.$$



Exercice IV.2.8. On considère la sphère de centre $(2, 1, 2)$ et de rayon 3.

Déterminer une équation du plan tangent en $a = (0, 0, 0)$.

Définition - Théorème IV.2.9. Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^3$. Soit $\mathcal{S}$ la surface d'équation $f(x, y, z) = 0$. Soit $M : t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ (on parle de *courbe paramétrée* de l'espace).

- (1) On dit que la courbe $t \mapsto M(t)$ est tracée sur la surface $\mathcal{S}$ si, pour tout $t \in I$, $f(x(t), y(t), z(t)) = 0$.
- (2) Supposons que, pour tout $t \in I$, $M'(t) \neq (0, 0, 0)$ (on dit que *la courbe est régulière*). Soit $t_0 \in I$. Notons $a = M(t_0)$. Supposons que a est un point régulier. Alors, la tangente en a à la courbe est contenue dans le plan tangent en a à la surface $\mathcal{S}$.

Remarque. Nous avons - dans des chapitres précédents - écrit des définitions de tangente à une courbe (*position limite des sécantes*) permettant de les visualiser. Concernant le plan tangent à une surface, la définition n'a rien d'intuitif! Faute de mieux, le résultat précédent permet de comprendre que le plan tangent à une surface en un point a est bien ce qu'on imagine, c'est-à-dire un plan qui contient toutes les tangentes en a aux courbes passant par a et tracées sur la surface $\mathcal{S}$.

V – Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$

Définition - Théorème V.0.1. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$.

- (1) Soit $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la i -ème dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est une fonction de p variables continue sur Ω .
Soit $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Si $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet une dérivée partielle par rapport à x_j (c'est-à-dire une j -ème dérivée partielle), cette dérivée partielle est notée $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$. On dit que c'est une dérivée partielle seconde de f ou une dérivée partielle d'ordre 2 de f .
On notera $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ plutôt que $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i}$. Si elle existe, la fonction $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ est une fonction de p variables définie sur Ω .
- (2) Si toutes les dérivées partielles secondes de f existent et sont continues sur Ω , on dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω .
Cela signifie que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que ses dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω .
- (3) [Lemme de Schwarz - ADMIS] Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω , alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ pour tous i et j dans $\llbracket 1; p \rrbracket$.

Exemple V.0.2. Les fonctions polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Proposition V.0.3 (Théorèmes généraux sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$). ✌ On a les mêmes théorèmes généraux pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ que pour les fonctions de classe $\mathcal{C}^1$: combinaison linéaire, produit, quotient, composition.

Exemple V.0.4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^2$, on note $g(r, \theta) = f(r \cos(\theta), r \sin(\theta))$. Démontrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et exprimer les dérivées partielles secondes de g en fonction des dérivées partielles de f .

Exercice V.0.5 (Équation aux dérivées partielles).

Déterminer toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x + y$.

On introduira la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $g(u, v) = f(u + v, u - v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

Définition V.0.6. Soit $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On appelle matrice hessienne de f en a et on note $H_f(a)$ la matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ définie ainsi :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; p \rrbracket, (H_f(a))_{i,j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a).$$

D'après le lemme de Schwarz, $H_f(a)$ est symétrique :

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_p}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_p}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_p^2}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple V.0.7.

- (1) On note $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$. Soit $a = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer la matrice hessienne de f en a .
- (2) On note $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$. Déterminer la matrice hessienne de f en $a = \left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Théorème V.8 (ADMIS). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$.

Il existe alors une fonction $\varepsilon : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\lim_{h \rightarrow (0, \dots, 0)} \varepsilon(h) = 0$ et, pour tout $h \in \mathbb{R}^p$ de norme assez petite :

$$\begin{aligned} f(a+h) &= f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, H_f(a).h \rangle + \varepsilon(h). \|h\|^2 \\ &\underset{h \rightarrow (0, \dots, 0)}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, H_f(a).h \rangle + o(\|h\|^2) \\ &\underset{h \rightarrow (0, \dots, 0)}{=} f(a) + h^T \cdot \nabla f(a) + \frac{1}{2} h^T \cdot H_f(a).h + o(\|h\|^2) \end{aligned}$$

où les **éléments de $\mathbb{R}^p$** ($\nabla f(a)$ et h) sont **identifiés à des matrices-colonnes**.

Cette égalité est appelée développement limité à l'ordre 2 de f en a .

VI – Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

Définition VI.0.1. Soit f une fonction de p variables définie sur une partie A de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$.

- On dit que f présente en a un maximum global si : pour tout $u \in A$, $f(u) \leq f(a)$. On note $f(a) = \max_A f$.
- On dit que f présente en a un minimum global si : pour tout $u \in A$, $f(a) \leq f(u)$. On note $f(a) = \min_A f$.
- On dit que f présente en a un extremum global si f présente en a un maximum ou un minimum global.

Définition VI.0.2. Soit f une fonction de p variables définie sur une partie A de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in A$.

- On dit que f présente en a un maximum local s'il existe $r > 0$ tel que :
pour tout $u \in A$, $\|u - a\| \leq r \implies f(u) \leq f(a)$.
On parle de *maximum local strict* si : $\exists r > 0, \forall u \in A, 0 < \|u - a\| \leq r \implies f(u) < f(a)$.
- On dit que f présente en a un minimum local s'il existe $r > 0$ tel que :
pour tout $u \in A$, $\|u - a\| \leq r \implies f(a) \leq f(u)$.
On parle de *minimum local strict* si : $\exists r > 0, \forall u \in A, 0 < \|u - a\| \leq r \implies f(a) < f(u)$.
- On dit que f présente en a un extremum local si f présente en a un maximum ou un minimum local.

Exemple VI.0.3. (1) La fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$ présente en $(0, 0, 0)$ un minimum global.

(2) On définit sur $C = [0; \pi] \times [0; \pi]$ la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$.

Montrer que f présente un minimum global en tout point de la forme (x, π) ou (π, y) et également en $(0, 0)$.

Vérifier que f n'admet un minimum global en aucun autre point de C .

Proposition VI.0.4. 

Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$.

Si f admet un maximum (respectivement minimum) local en a alors, pour tout vecteur non nul $\vec{v}$, l'application partielle $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v})$ admet en 0 un maximum (respectivement minimum) local.

Cette remarque s'avèrera particulièrement utile pour montrer qu'une fonction n'admet pas d'extremum en a .

Définition - Théorème VI.0.5. Soit f une fonction définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$.

- On dit que a est un point critique de f si $\nabla f(a) = \vec{0}$, autrement dit si $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.
- Si f admet en a un extremum local, alors a est un point critique de f .

Remarque. 

Les extremums locaux **sur un ouvert** sont donc à chercher parmi les points critiques de la fonction.

Pourtant, la recherche des extremums d'une fonction ne peut se résumer à la recherche des points critiques.

- (1) Une fonction peut être définie sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ **qui n'est pas un ouvert** et peut donc admettre des extremums au bord de ce domaine. Le théorème précédent ne s'applique pas dans ce cas.

On peut par exemple observer la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sur $[-1; 1] \times [-1; 1]$ qui admet un maximum (global) en $(1, 1)$ (et aussi en $(\pm 1, \pm 1)$) qui n'est pas un point critique.

- (2) Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ peut admettre un point critique sans présenter en ce point d'extremum local.

Être un point critique n'est pas une condition suffisante.

On peut par exemple observer le comportement de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$ au voisinage du point critique $(0, 0)$.

En effet, la fonction $t \mapsto f(t, 0) = t^2$ admet un minimum strict en 0 alors que la fonction $t \mapsto f(0, t) = -t^2$ admet en 0 un maximum strict. En ce point, f n'admet donc ni maximum local, ni minimum local.

Méthode.  On commence par chercher **les points critiques sur un ouvert** Ω de $\mathbb{R}^p$. Ce sont les seuls extremums *possibles* sur Ω .

Rien n'assure que ces points soient des extremums, il faut **les étudier un par un**.

La fin de ce chapitre est consacrée à la description de méthodes classiques pour déterminer la nature de ces points critiques.

Aucune méthode générale ne sera donnée pour la recherche d'extremums sur une partie qui n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Un exemple sera étudié en fin de chapitre.

Exemple VI.0.6.

MÉTHODE 1. Étudier les extremums de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 4x - 4y + 2z$.

Après avoir trouvé un point critique $a = (\alpha, \beta, \gamma)$, on montrera que la quantité $f(\alpha + X, \beta + Y, \gamma + Z) - f(\alpha, \beta, \gamma)$ garde un signe constant, au moins pour $\|(X, Y, Z)\|$ assez petite.

MÉTHODE 2. Déterminer les points critiques de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.

Montrer que f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

On utilisera des applications partielles en $(0, 0)$ pour montrer qu'en ce point, f ne peut admettre ni maximum local, ni minimum local.

Théorème VI.7 (MÉTHODE 3).

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que a est un point critique de f .

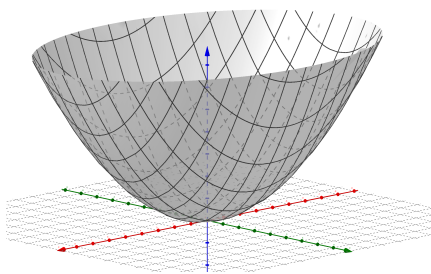
- (1) (a) Si $H_f(a)$ n'a que des valeurs propres strictement positives (c'est-à-dire $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$), alors f atteint en a un minimum local strict.
- (b) Si $H_f(a)$ possède une valeur propre strictement négative (c'est-à-dire $H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$), alors f n'admet pas de minimum local en a .
- (2) En remarquant que $H_{-f}(a) = -H_f(a)$, on en déduit les résultats suivants.
 - (a) Si $H_f(a)$ n'a que des valeurs propres strictement négatives (c'est-à-dire $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$), alors f atteint en a un maximum local strict.
 - (b) Si $H_f(a)$ possède une valeur propre strictement positive (c'est-à-dire $-H_f(a) \notin \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$), alors f n'admet pas de maximum local en a .
- (3) Si $H_f(a)$ possède une valeur propre strictement positive et une autre strictement négative, alors f ne présente pas d'extremum local en a . On dit que f présente en a un point-selle.

Corollaire VI.0.8 (MÉTHODE 3 (cas $p = 2$)).

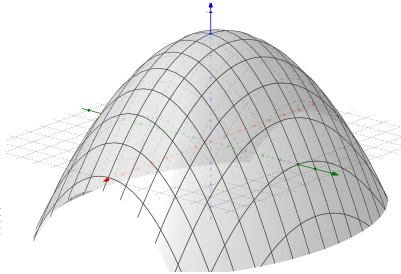
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \Omega$. On suppose que a est un point critique de f .

On note $H_f(a) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$. En particulier, $\det(H_f(a)) = rt - s^2$ et $\text{tr}(H_f(a)) = r + t$.

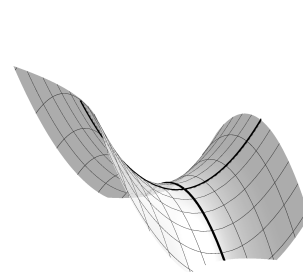
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t > 0$, f présente en a un minimum local strict.
- Si $rt - s^2 > 0$ et $r + t < 0$, f présente en a un maximum local strict.
- Si $rt - s^2 < 0$, f ne présente pas d'extremum local en a . On dit que f présente en a un point-selle.
- Si $rt - s^2 = 0$, on ne peut rien conclure sur la présence d'un extremum local en a .



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$$



$$\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$$



$$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$$

Exemple VI.0.9. Déterminer les extremums (locaux puis globaux) de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3 - 6(x^2 - y^2)$.

Dans un exercice précédent, on a déjà montré la présence d'un point-selle en $(0, 0)$.

Exercice VI.0.10. On définit sur $C = [0; \pi] \times [0; \pi]$ la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$.

Étudier l'existence d'extremums (éventuellement locaux) de f sur C .

Dans des exercices précédents, on a déjà :

- ★ montré que f admet un minimum et un maximum sur C ;
- ★ montré que f admet un minimum global en $(0, 0)$ et en tout point de la forme (x, π) ou (π, x) (minimum atteint seulement en ces points);
- ★ calculé la hessienne de f en $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice VI.0.11. On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f : (x, y) \mapsto (x^2 - y)(3x^2 - y).$$

- (1) Vérifier que $a = (0, 0)$ est le seul point critique de f sur $\mathbb{R}^2$. Écrire la matrice $H_f(a)$.

Que peut-on en déduire?

- (2) Soit $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On note $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(t\vec{v})$. Démontrer que $\varphi_{\vec{v}}$ admet un minimum local strict en 0.
- (3) En utilisant la fonction $t \mapsto f(t, 2t^2)$, montrer que f ne présente pourtant pas de minimum local en a .