

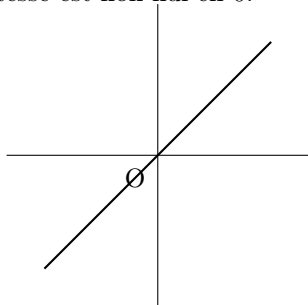
Dans ce document, on propose d'étudier quelques courbes planes d'équation $f(x, y) = 0$ pour lesquelles le gradient de f s'annule en un point $a = (\alpha, \beta)$ ($\nabla f(a) = (0, 0)$). Rien dans le cours ne permet alors de savoir si la courbe admet une tangente en a . Nous allons voir que c'est parfois le cas, mais pas toujours ...

Avant de parcourir ces quelques exemples, essayons de comprendre l'intérêt d'un gradient non nul pour que la courbe possède une tangente.

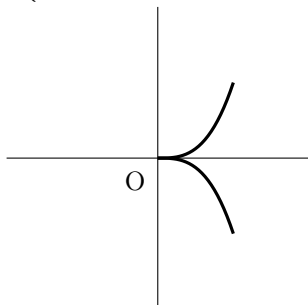
Rappelons que la courbe plane $\mathcal{E}$ d'équation $f(x, y) = 0$ est obtenue en intersectant le graphe de f (qui est une nappe, une surface) par le plan horizontal d'équation $z = 0$. Dans le cas où le gradient de f en a est non nul, le plan tangent au graphe de f en $(\alpha, \beta, 0)$ n'est pas horizontal. Quand on réalise l'intersection avec le plan d'équation $z = 0$, les deux plans s'intersectent selon une droite qui est alors la tangente à la courbe $\mathcal{E}$ (c'est-à-dire une approximation locale de la courbe par une droite, ce qui donne à la courbe une certaine régularité).

Au contraire, si le gradient s'annule, le plan tangent au graphe de f en $(\alpha, \beta, 0)$ est horizontal (d'équation $z = 0$) et donc sa propre intersection avec le plan d'équation $z = 0$. Rien ne permet alors d'assurer que la courbe possède une tangente. On peut déjà penser à la fonction f identiquement nulle pour laquelle la courbe $\mathcal{E}$ est un plan... Nous allons le voir dans les exemples suivants des situations variées où les courbes peuvent ou non être paramétrées, possèdent ou non une tangente.

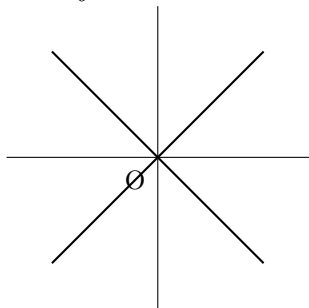
Exemple 1. $f(x, y) = x^3 - y^3$ et $a = (0, 0)$. $\nabla f(a) = (0, 0)$ et la courbe $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $y = x$. Elle possède donc une tangente en $(0, 0)$. On peut paramétrer cette courbe par $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t \end{cases}$ et on remarque que le vecteur vitesse est non nul en 0.



Exemple 2. $f(x, y) = x^3 - y^2$ et $a = (0, 0)$. $\nabla f(a) = (0, 0)$ et la courbe $\mathcal{E}$ est la réunion des graphes des fonctions $x \mapsto \sqrt{x^3}$ et $x \mapsto -\sqrt{x^3}$. Elle possède donc une tangente (horizontale) en $(0, 0)$. On peut paramétrer cette courbe par $\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}$ et on remarque que le vecteur vitesse est nul en 0.



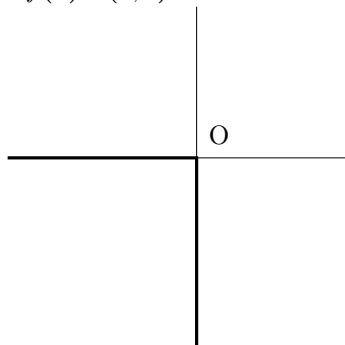
Exemple 3. $f(x, y) = x^2 - y^2$ et $a = (0, 0)$. $\nabla f(a) = (0, 0)$ et la courbe $\mathcal{E}$ est la réunion des droites d'équations $y = x$ et $y = -x$. Elle ne possède donc pas de tangente en $(0, 0)$ (point double). On pourrait paramétrer chaque droite et justifier l'existence d'une tangente en $(0, 0)$ pour chacune de ces branches mais ce n'est pas la question ici.



Exemple 4. Un exemple plus subtil de courbe plane qui dessine *un coin*. Notons $f : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ t^2 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$, fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Notons alors $G : (x, y) \mapsto f(x) + f(y)$ et $H : (x, y) \mapsto f(-x)f(-y)$ qui sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ par opérations et POSITIVES.

Notons également $f : (x, y) \mapsto G(x, y) + H(x, y)$, elle aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$\nabla f(a) = (0, 0)$ et la courbe $\mathcal{E}$ est représentée ci-dessous (exercice) :



Le gradient de f s'annule en tous les points de la courbe (exercice), c'est-à-dire de la forme $(-t, 0)$ et $(0, -t)$ pour $t \geq 0$. Il y a une tangente en tous les points autres que $(0, 0)$ mais pas de tangente en $(0, 0)$.

On peut paramétrer cette courbe par
$$\begin{cases} x(t) &= \begin{cases} t e^{\frac{-1}{t^2}} & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \\ y(t) &= \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ -t e^{\frac{-1}{t^2}} & \text{si } t \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad \text{et on remarque que le vecteur vitesse}$$

est nul en 0 (mais pas en $t \neq 0$).

Remarque. On a vu dans le cours que, si le gradient est non nul, on peut paramétrer la courbe au voisinage de a par des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de sorte que le vecteur vitesse ne s'annule pas (théorème dit *des fonctions implicites*) et dirige donc la tangente à la courbe en a .

Si le gradient s'annule, on a vu dans certains des exemples précédents qu'on pouvait parfois paramétrer la courbe de la même manière et justifier l'existence d'une tangente (toujours dirigée par le vecteur vitesse).

En revanche, si on peut paramétrer la courbe mais que le vecteur vitesse s'annule, alors tout est possible : une tangente quand même (exemple 2, appelé *point de rebroussement*) ou pas de tangente du tout (exemple 4).

Concernant une définition intrinsèque de la tangente, c'est un sujet épineux et les tentatives sont souvent infructueuses (on trouve des exemples de courbes qui posent problème). On peut citer une définition angulaire : la droite D est tangente à la courbe $\mathcal{E}$ en a si, pour tout $\alpha > 0$, il existe un voisinage de a tel que l'intersection de la courbe et de ce voisinage se trouve dans le cône de sommet a et d'angle 2α autour de D .