

Chapitre 1 - Intégration sur un intervalle

Dans ce chapitre, tous les intervalles sont supposés non vides.

Dans ce chapitre, la notation $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Sauf mention du contraire, toutes les fonctions seront supposées à valeurs dans $\mathbb{K}$. Soient deux réels a et b tels que $a < b$. On rappelle qu'un intervalle de la forme $[a; b]$ est appelé *segment*.

I – Intégration sur un segment d'une fonction continue par morceaux

1) Fonctions continues par morceaux

Définition I.1.1. On appelle subdivision de $[a; b]$ toute famille de réels $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que $n \in \mathbb{N}^*$ et

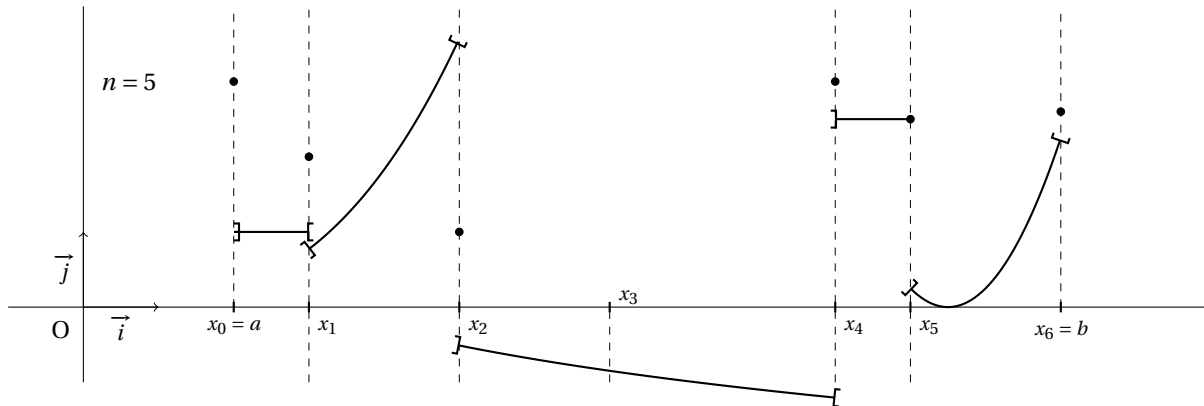
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Définition I.1.2. Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction.

f est dite continue par morceaux sur $[a; b]$ s'il existe une subdivision de $[a; b]$, notée $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$, telle que f soit continue sur chacun des intervalles ouverts $]x_i; x_{i+1}[$ et prolongeable en une fonction continue sur $[x_i; x_{i+1}]$ (pour tout $0 \leq i < n$).

Cette dernière condition revient à dire que les limites de $f|_{]x_i; x_{i+1}[}$ aux bornes de l'intervalle ouvert $]x_i; x_{i+1}[$ sont finies.

On dit que la subdivision u est *adaptée* à f .



Exemple I.1.3. • Si f est continue par morceaux sur $[a; b]$, alors pour tout segment $[c; d] \subset [a; b]$, $f|_{[c; d]}$ est continue par morceaux sur $[c; d]$.

• Les fonctions continues sur $[a; b]$ sont continues par morceaux sur $[a; b]$.

• La restriction au segment $[a; b]$ de la fonction partie entière est continue par morceaux sur $[a; b]$. En général, les fonctions en escalier sur $[a; b]$ sont continues par morceaux sur $[a; b]$.

• La fonction $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ e^x & \text{si } x \in]0; 1[\\ x^3 & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$ est continue par morceaux sur $[0; 2]$.

• La fonction $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \ln(x) & \text{si } x \in]0; 1[\\ x^3 & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$ n'est pas continue par morceaux sur $[0; 2]$.

Proposition I.1.4 (ADMIS). (1) Une fonction définie et continue par morceaux sur $[a; b]$ présente un nombre fini de points de discontinuité. La réciproque n'est pas vraie.

(2) Une fonction définie et continue par morceaux sur un segment est bornée. Attention : pas de théorème des bornes atteintes!

(3) Si f est à valeurs complexes, f est continue par morceaux sur $[a; b]$ si et seulement les fonctions réelles $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont continues par morceaux sur $[a; b]$.

(4) L'ensemble $\mathcal{C}_{mx}([a; b], \mathbb{K})$ des fonctions définies et continues par morceaux sur $[a; b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$.

(5) Soient f et g dans $\mathcal{C}_{mx}([a; b], \mathbb{K})$. Les fonctions fg , $\bar{f}$ et $|f|$ appartiennent à $\mathcal{C}_{mx}([a; b], \mathbb{K})$.

Définition I.1.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$. La fonction f est dite continue par morceaux sur I si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux sur ce segment.

Exemple I.1.6. • Les fonctions continues sur I sont continues par morceaux sur I .

- La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- Si f est continue par morceaux sur I , alors pour tout intervalle $J \subset I$, $f|_J$ est continue par morceaux sur J .

Remarque. (1)  Une fonction continue par morceaux **sur un intervalle** peut avoir une infinité de points de discontinuité et peut ne pas être bornée.

- (2)  Pour justifier qu'une fonction f est continue par morceaux sur un intervalle I , il suffit la plupart du temps de remarquer que f est continue sur I . Si la fonction présente quelques points de discontinuité, il suffira de vérifier que les limites à gauche et à droite en ces points sont finies. Il est très rare d'avoir à faire à des cas plus délicats.

2) Définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

Définition - Théorème I.2.7 (ADMIS).

Soit $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$. Il existe donc une subdivision $u = (x_i)_{0 \leq i \leq n}$ adaptée à f . Pour tout $i \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, la fonction $f|_{]x_i; x_{i+1}[}$ se prolonge en une fonction $\tilde{f}_i$ continue sur le segment $[x_i; x_{i+1}]$.

On appelle intégrale de f sur $[a; b]$ et on note $\int_{[a; b]} f$ le nombre

$$\int_{[a; b]} f = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \tilde{f}_i(t) dt.$$

Cette définition ne dépend pas de la subdivision u choisie.

Remarque. (1) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on retrouve (comme dans le cas des fonctions continues sur un segment) que, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'intégrale ainsi définie est l'*aire algébrique* de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentative de f (l'unité d'aire étant l'aire du rectangle construit sur les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$). L'expression *aire algébrique* signifie que l'aire des parties situées au-dessus de l'axe des abscisses sont comptées positivement alors que celle des parties situées en dessous de l'axe des abscisses sont comptées négativement.

- (2) Une fonction définie sur $[a; b]$ et nulle sauf en un nombre fini de points est continue par morceaux et a une intégrale nulle.

Définition I.2.8. Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soient a et b deux éléments (quelconques!) de I . On définit :

- si $a < b$, $\int_a^b f(x)dx = \int_{[a;b]} f$;
- si $a = b$, $\int_a^b f(x)dx = 0$;
- si $b < a$, $\int_a^b f(x)dx = -\int_{[b;a]} f$.

Remarque.  Dans la pratique, on prendra - si possible - l'habitude de manipuler des intégrales où les bornes sont *dans le bon sens*, pour éviter les erreurs dans les manipulations d'inégalités. Pour échanger les bornes d'une intégrale, il suffira de la multiplier par (-1) : on écrira $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

3) Propriétés fondamentales de l'intégrale (ADMISES)

Proposition I.3.9 (Linéarité). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I . Soient a et b dans I . Soient λ et μ dans $\mathbb{C}$.

$$\int_a^b \lambda f(x) + \mu g(x) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x) dx.$$

En particulier, si f est à valeurs dans $\mathbb{C}$: $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(x) dx$.

Remarque. Deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont la même intégrale.

Proposition I.3.10 (Positivité). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et $\boxed{\text{à valeurs dans } \mathbb{R}}$.

Soient a et b dans I tels que $\boxed{a \leq b}$.

(1) Si $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

(2) Si $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in [a; b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$ (croissance de l'intégration).

Proposition I.3.11 (Inégalité triangulaire). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I . Soient a et b dans I tels que $\boxed{a \leq b}$.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Remarque.  Si $b < a$ (on dit que les bornes *ne sont pas dans le bon ordre*), ces deux résultats sont faux!

Proposition I.3.12 (Chasles).

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I . Soient a , b et c dans I .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

4) Théorème fondamental du calcul intégral

Théorème I.13 (Version f continue par morceaux).

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue par morceaux sur I . Soit $a \in I$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue sur I et dérivable en tout point x_0 de continuité de f avec $F'_a(x_0) = f(x_0)$.

Remarque.  Contrairement au théorème de première année où f est supposée continue (voir théorème suivant), la fonction F_a n'est pas forcément dérivable sur I .

Considérons par exemple $f : x \mapsto \begin{cases} -1 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$

f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. Considérons $a = 1$ et explicitons la fonction F_1 .

Pour tout $x \leq 0$:

$$F_1(x) = \int_1^x f(t) dt = - \int_x^1 f(t) dt = - \left(\int_x^0 f(t) dt + \int_0^1 f(t) dt \right) = - \left(\int_x^0 -1 dt + \int_0^1 1 dt \right) = -(x+1) = -x-1.$$

Pour tout $x > 0$:

$$F_1(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x 1 dt = x-1.$$

Vérifier que F_1 n'est pas dérivable en 0.

Remarque.  Pour calculer l'intégrale d'une fonction seulement continue par morceaux (et pas continue), on devra comme dans l'exemple précédent utiliser la relation de Chasles pour se ramener au calcul d'intégrales de fonctions continues sur un segment (vues en première année).

Théorème I.14 (Version f continue). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie et continue sur I . Soit $a \in I$.

La fonction $F_a : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F'_a = f$.

En particulier, F_a est continue sur I .

II – Intégrales généralisées

1) Définitions - Exemples

Définition - Théorème II.1.1.

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si $\int_a^x f(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers b^- .

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt$, c'est la valeur de l'intégrale généralisée.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

- Pour tout $c \in [a; b[$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_c^b f(t) dt$ converge. On dit alors que l'intégrale est convergente en b ; sinon on dit que l'intégrale est divergente en b .

La nature de l'intégrale ne dépend donc que du comportement local de f en b .

Notation.  Supposons f continue sur $[a; b[$ et notons F une primitive de f sur $[a; b[$. Si l'intégrale généralisée est convergente, on peut noter :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - F(a).$$

Notation.  On peut également noter $\int_a^b f$ ou $\int_{[a; b[} f$ à la place de $\int_a^b f(t) dt$.

La deuxième forme permet de mettre en avant le fait que c'est la convergence de l'intégrale en b qui est étudiée.

Exemple II.1.2. (1) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $[1; +\infty[$.

L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est convergente et $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = 1$.

(2) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue (par morceaux) sur $[1; +\infty[$. L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est divergente.

Définition - Théorème II.1.3.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a; b]$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si $\int_x^b f(t) dt$ a une limite finie quand x tend vers a^+ .

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$, c'est la valeur de l'intégrale généralisée.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

- Pour tout $c \in]a; b]$, l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^c f(t) dt$ converge. On dit alors que l'intégrale est convergente en a ; sinon on dit que l'intégrale est divergente en a .

La nature de l'intégrale ne dépend donc que du comportement local de f en a .

Notation.  Supposons f continue sur $]a; b]$ et notons F une primitive de f sur $]a; b]$. Si l'intégrale généralisée est convergente, on peut noter :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t).$$

Exemple II.1.4. (1) La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est continue (par morceaux) sur $]0; 1]$.

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ est divergente.

(2) La fonction $g : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue (par morceaux) sur $]0; 1]$.

L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est convergente et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2$.

Définition - Théorème II.1.5.

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a; b[$.

- On dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente s'il existe $c \in]a; b[$ tel que les intégrales généralisées

$\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ soient convergentes (la première en a , la seconde en b).

Dans ce cas, pour tout $d \in]a; b[$, les intégrales généralisées $\int_a^d f(t) dt$ et $\int_d^b f(t) dt$ sont convergentes et

$$\int_a^d f(t) dt + \int_d^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

On note alors $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$, c'est la valeur de l'intégrale généralisée (notée aussi $\int_{]a; b[} f$).

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est divergente.

Notation.  Supposons f continue sur $]a; b[$ et notons F une primitive de f sur $]a; b[$. Si l'intégrale généralisée est convergente, on peut noter :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} F(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} F(t).$$

Exemple II.1.6. (1) La fonction $h : t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$.

L'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$ est convergente et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \pi$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $u_\alpha : t \mapsto t^\alpha$ est continue (par morceaux) sur $]0; +\infty[$.

L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} t^\alpha dt$ est divergente. On distinguera les cas $\alpha = -1$, $\alpha > -1$ et $\alpha < -1$.

Proposition II.1.7.  Soit f une fonction à valeurs complexes. Dans les différents cas présentés ci-dessus, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt$ convergent. En cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f)(t) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)(t) dt.$$

Proposition II.1.8. Soient a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a; b]$.

Alors les intégrales généralisées $\int_{[a; b[} f$, $\int_{]a; b]} f$ et $\int_{]a; b[} f$ convergent (on note $\int_{[a; b[} f$ plutôt que $\int_{[a; b[} f|_{[a; b[}$ pour alléger les notations)

et ont la même valeur : $\int_a^b f(t) dt$ (intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux).

Méthode.  Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b]$.

Si f se prolonge en une fonction continue par morceaux sur le segment $[a, b]$, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente. On dit que l'intégrale est **faussement généralisée** en b .

On a bien sûr l'énoncé analogue en a si f est continue par morceaux sur $]a; b]$.

Remarque. On utilise particulièrement ce résultat pour une fonction continue sur $[a; b]$ et qui possède une limite finie en b .



Ne pas oublier que b est un nombre réel. On a déjà rencontré des fonctions dont la limite est nulle en $b = +\infty$ et dont l'intégrale généralisée est divergente.

Exemple II.1.9. Montrer que l'intégrale généralisée $\int_0^1 t \ln(t) dt$ est convergente et calculer sa valeur.

2) Fonctions de référence

Proposition II.2.10 (Intégrales de Riemann). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (1) L'intégrale généralisée $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha < 1$.
- (2) L'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Proposition II.2.11. L'intégrale généralisée $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

Proposition II.2.12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. L'intégrale généralisée $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} dt$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

3) Propriétés fondamentales des intégrales généralisées

Proposition II.3.13 (Linéarité).

Soit I un intervalle d'une des formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I . Soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) + \lambda g(t) dt$ converge et

$$\int_a^b f(t) + \lambda g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt.$$

Remarque. 

Il est possible que $\int_a^b f(t) + g(t) dt$ converge alors que $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont divergentes. On devra veiller à la convergence de ces deux intégrales pour pouvoir utiliser la linéarité.

Par exemple, **on ne pourra pas écrire** : $\int_2^{+\infty} \frac{2}{t^2-1} dt = \int_2^{+\infty} \frac{1}{t-1} dt - \int_2^{+\infty} \frac{1}{t+1} dt$.

Proposition II.3.14 (Positivité - Croissance).

Soit I un intervalle d'une des formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I à valeurs réelles.

- (1) Si $f \geq 0$ et si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- (2) Si $f \leq g$ et si les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Proposition II.3.15 (Chasles).

Soit I un intervalle d'une des formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$. Soit f une fonction continue par morceaux sur I . Soit $c \in]a; b[$.

Les fonctions $f|_{]a; c]}$ et $f|_{]c; b]}$ sont alors continues par morceaux sur $]a; c]$ et $]c; b]$ respectivement.

L'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ existent.

Dans ce cas, on a : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Il est possible que f soit continue par morceaux sur $[a; c]$ ou sur $[c; b]$ et donc que l'une des deux intégrales soit l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.

4) Cas particulier des fonctions positives

Lemme II.4.16. (1) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$ à valeurs (réelles) positives. Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est majorée.

(2) Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a; b]$ à valeurs (réelles) positives. Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si la fonction $x \mapsto \int_x^b f(t) dt$ est majorée.

Théorème II.17 (Théorème de comparaison pour les fonctions positives).

Soit I un intervalle qui n'est pas un segment (d'une des trois formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$).

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs réelles positives.

On suppose que $f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in I$.

(1) Si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.

(2) Si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ diverge.

Remarque. ✌ Dans la démonstration du théorème suivant, on va justifier qu'il suffit seulement d'avoir l'inégalité au voisinage de a pour pouvoir appliquer ce résultat aux intégrales généralisées $\int_{]a; b]} f$ et $\int_{]a; b]} g$.

Théorème II.18 (Théorèmes de comparaison pour les fonctions positives). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b[$ et à valeurs réelles positives (respectivement négatives).

(1) On suppose que $f = O_b(g)$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.

(2) On suppose que $f = o_b(g)$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.

(3) On suppose que $f \sim_b g$. L'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ est divergente, on peut utiliser la contraposée d'un des deux premiers points.

Théorème II.19 (Théorèmes de comparaison pour les **fonctions positives**). Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$ et à valeurs réelles positives (respectivement négatives).

- (1) On suppose que $f \underset{a}{=} O(g)$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- (2) On suppose que $f \underset{a}{=} o(g)$. Si l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.
- (3) On suppose que $f \underset{a}{\sim} g$. L'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ converge si et seulement si l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ converge.

Pour montrer que l'intégrale généralisée $\int_a^b g(t) dt$ est divergente, on peut utiliser la contraposée d'un des deux premiers points.

Exercice II.4.20. On définit la fonction Gamma par

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Déterminer le domaine de définition de Γ .

On demande ici de déterminer les valeurs de x pour lesquelles $\Gamma(x)$ existe bien, c'est-à-dire pour lesquelles l'intégrale converge.

Remarque.  Quand on demande de démontrer qu'une intégrale existe, on demande de vérifier qu'il s'agit de l'intégrale d'une fonction continue (par morceaux) sur un segment ou d'une intégrale généralisée convergente.

5) Intégration par parties - Changement de variable

Théorème II.21 (Intégration par parties - ADMIS). Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a; b[$.

Si $\lim_{t \rightarrow a^+} u(t)v(t)$ et $\lim_{t \rightarrow b^-} u(t)v(t)$ existent et sont finies,

alors les intégrales généralisées $\int_a^b u(t)v'(t) dt$ et $\int_a^b u'(t)v(t) dt$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a l'égalité :

$$\int_a^b u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) dt,$$

où on a noté $[u(t)v(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} u(t)v(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} u(t)v(t)$.

Remarque. 

- Dans la pratique, il n'est pas indispensable de rappeler l'hypothèse de régularité des fonctions u et v . En revanche, on présentera ces fonctions et on vérifiera l'existence des deux limites pour pouvoir appliquer le théorème.
- Si u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a; b]$, il est également possible d'utiliser le théorème de première année sur un segment ($[a; x]$ par exemple) puis de faire tendre x vers b à la fin du calcul. C'est ainsi que se fait la démonstration.

Exemple II.5.22. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx$. Montrer que I_n existe et vaut $n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a ici démontré que $\Gamma(n+1) = n!$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou encore que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction Γ est donc une fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui prolonge la factorielle (qui est seulement définie sur $\mathbb{N}$).

Exemple II.5.23 (Lemme de Riemann-Lebesgue). Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a; b]$. Démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \sin(nt) dt = 0.$$

Théorème II.24 (Changement de variable - ADMIS).

Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$. Soient $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $\beta \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $\alpha < \beta$.

Soit $\varphi :]\alpha; \beta[\rightarrow]a; b[$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bijective et strictement monotone.

Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur $]a; b[$.

Alors les intégrales généralisées $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$ sont de même nature.

$$\text{En cas de convergence : } \int_a^b f(t) dt = \begin{cases} \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du & \text{si } \varphi \text{ est strictement croissante,} \\ -\int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du & \text{si } \varphi \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$$

On dit qu'on réalise le changement de variable $t = \varphi(u)$ (ou $u = \varphi^{-1}(t)$!).

Remarque.  Dans la pratique, et particulièrement dans le cas de changements de variables usuels ($u = mt + p$, $u = t^2$, $u = e^x$, ...), on pourra appliquer ce résultat sans justification.

Remarque. Le fait que ces deux théorèmes permettent seulement de déterminer la nature d'une intégrale sur l'ouvert $]a; b[$ n'est en aucun cas réducteur. En effet, si une fonction f est continue par morceaux sur $[a; b[$ (par exemple), la convergence de l'intégrale $\int_{[a; b[} f$ est équivalente à celle de l'intégrale $\int_{]a; b[} f$ et les intégrales sont égales en cas de convergence (résultat analogue à (II.1.7)).

Ces deux théorèmes s'appliquent donc aussi bien à des intégrales généralisées sur $[a; b[$ ou sur $]a; b]$.

Corollaire II.5.25 (Fonctions de référence). Soient a et b deux réels tels que $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

(2) L'intégrale généralisée $\int_a^b \frac{1}{(b-x)^\alpha} dx$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple II.5.26. Montrer que l'intégrale suivante existe et calculer sa valeur : $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$.

III – Intégrabilité

1) Définition - Premières propriétés

Définition III.1.1. Soit I un intervalle qui n'est pas un segment (d'une des trois formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$).

- Soit f une fonction définie et continue par morceaux sur I .

On dit que l'intégrale généralisée de f sur I est absolument convergente si l'intégrale généralisée $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

- On dit qu'une fonction f est intégrable sur I si f est définie et continue par morceaux sur I et si l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

Remarque.  Supposons que f est continue par morceaux sur $I =]a; b]$. Pour tout $c \in]a; b]$, f est intégrable sur $]a; b]$ si et seulement si f est intégrable sur $]a; c]$. On dit alors simplement que f est intégrable en a .

L'intégrabilité de f ne dépend dans ce cas que du comportement local de f (de $|f|$ en fait) au voisinage de a .

On définit de manière analogue l'intégrabilité d'une fonction en b .

Théorème III.2. Soit I un intervalle qui n'est pas un segment (d'une des trois formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$.

Si f est intégrable sur I alors l'intégrale généralisée $\int_a^b f(t) dt$ est convergente.

De plus, on a dans ce cas l'inégalité triangulaire :

$$\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt.$$

Théorème III.3. Soit I un intervalle qui n'est pas un segment (d'une des trois formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$).

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Théorème III.4 (Critère de nullité).

Soit I un intervalle qui n'est pas un segment (d'une des trois formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$).

Supposons que f est une fonction intégrable sur I , **continue sur I** et à valeurs **réelles positives**.

$\int_a^b f(t) dt = 0$ si et seulement si $f(t) = 0$ pour tout $t \in I$ (f est identiquement nulle sur I).

On utilise souvent la contraposée de ce résultat pour justifier que $\int_a^b f(t) dt > 0$, en précisant bien les hypothèses :

" f est **continue** sur I , **positive** sur I et non identiquement nulle donc $\int_a^b f(t) dt > 0$ ".

2) Fonctions de référence

Théorème III.5. (1) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0; 1]$ (c'est-à-dire en 0) si et seulement si $\alpha < 1$.

(2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1; +\infty[$ (c'est-à-dire en $+\infty$) si et seulement si $\alpha > 1$.

(3) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0; 1]$ (c'est-à-dire en 0).

(4) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ (c'est-à-dire en $+\infty$) si et seulement si $\alpha > 0$.

(5) Soient a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(a) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable sur $]a; b]$ (c'est-à-dire en a) si et seulement si $\alpha < 1$.

(b) La fonction $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ est intégrable sur $[a; b[$ (c'est-à-dire en b) si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque. ✌ On pensera à généraliser à d'autres fonctions le principe de changement de variable affine utilisé pour obtenir le dernier résultat de ce théorème à partir du premier point.

Par exemple, la fonction $t \mapsto \ln(3-t)$ est intégrable en 3 et la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est intégrable en -1 .

De la même manière, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^n}$ est intégrable en $-\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

3) Théorèmes de comparaison

Théorème III.6.

Soit I un intervalle qui n'est pas un segment (d'une des trois formes $[a; b[,]a; b]$ ou $]a; b[$).

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur I . On suppose que $0 \leq |f(t)| \leq |g(t)|$ pour tout $t \in I$.

- Si g est intégrable sur I alors f est intégrable sur I .
- Si f n'est pas intégrable sur I alors g n'est pas intégrable sur I .

Remarque. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. f est intégrable sur I si et seulement si les fonctions (réelles) $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont intégrables sur I .

Théorème III.7 (Théorèmes de comparaison). Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ tels que $a < b$.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a; b[$.

(1) On suppose que $f = O_b(g)$ (ou $|f| = O_b(g)$). Si g est intégrable en b , alors f est intégrable en b .

(2) On suppose que $f = o_b(g)$ (ou $|f| = o_b(g)$). Si g est intégrable en b , alors f est intégrable en b .

(3) On suppose que $f \sim_b g$ (ou $|f| \sim_b g$). f est intégrable en b si et seulement si g est intégrable en b .

Pour montrer qu'une fonction n'est pas intégrable en b , on peut utiliser la contraposée des deux premiers points.

Théorème III.8 (Théorèmes de comparaison). Soient $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur $]a; b]$.

(1) On suppose que $f = O_a(g)$ (ou $|f| = O_a(g)$). Si g est intégrable en a , alors f est intégrable en a .

(2) On suppose que $f = o_a(g)$ (ou $|f| = o_a(g)$). Si g est intégrable en a , alors f est intégrable en a .

(3) On suppose que $f \sim_a g$ (ou $|f| \sim_a g$). f est intégrable en a si et seulement si g est intégrable en a .

Pour montrer qu'une fonction n'est pas intégrable en a , on peut utiliser la contraposée des deux premiers points.

Méthode. ✌ Soient a et b deux **réels** tels que $a < b$. Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a; b[$.

Si f est prolongeable par continuité en b (f admet une limite finie en b), alors $f = O(1)$ et, par comparaison, f **est intégrable en b** .

La plupart du temps dans ce cas, l'intégrale $\int_{[a;b[} f$ (et donc $\int_{[a;b[} |f|$) sera une intégrale faussement généralisée donc l'intégrabilité de f sera immédiate.

On a bien sûr l'énoncé analogue en a si f est continue par morceaux sur $]a; b]$.

Remarque. ✌✍

- (1) On peut utiliser ces mêmes théorèmes pour étudier seulement la nature d'intégrales généralisées :
 - ★ en cas d'intégrabilité de la fonction, on a immédiatement la convergence de l'intégrale généralisée;
 - ★ en cas de non intégrabilité de la fonction, on ne peut conclure quant à la nature de l'intégrale généralisée sauf dans le cas (très fréquent) des fonctions **à valeurs réelles positives** (ou **réelles négatives**). En effet, dans ces cas, l'intégrabilité sur I est équivalente à la convergence de l'intégrale généralisée sur I .

" f est continue (par morceaux) sur I et positive. L'intégrabilité de f sur I est donc équivalente à la convergence de l'intégrale généralisée."

- (2) Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction : on commencera par vérifier qu'elle est continue (par morceaux) sur l'intervalle proposé puis par calculer un équivalent simple (de $|f|$) en les bornes où l'intégrabilité pose question.

Exercice III.3.9. Les intégrales suivantes existent-elles ?

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(t)}{1+t^3} dt; \quad (2) \int_0^1 \frac{\ln(t)}{t^3} dt; \quad (3) \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{\sqrt{t}} dt; \quad (4) \int_2^{+\infty} \frac{1}{t \ln(t)} dt.$$

Les trois dernières intégrales sont des exemples d'*intégrales de Bertrand*, intégrales classiques qui font l'objet d'un exercice de la feuille de TD.

4) Un exemple de fonction non intégrable mais dont l'intégrale généralisée converge

Exercice III.4.10. On définit sur $[1; +\infty[$ la fonction $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

Par opérations, f est continue (par morceaux) sur $[1; +\infty[$.

- (1) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ converge.
- (2) Pour tout $x \geq 1$, on note $G(x) = \int_1^x |f(t)| dt$
 - (a) Montrer que pour tout $x \geq 1$: $\int_1^x \frac{1 - \cos(2t)}{2t} dt \leq G(x)$.
 - (b) En utilisant une intégration par parties, montrer que l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{t} dt$ converge.
 - (c) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = +\infty$.
Que pouvez-vous en déduire sur l'intégrabilité de f sur $[1; +\infty[$?
- (3) Justifier l'existence des intégrales suivantes et montrer que $\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin(t)}{t} \right)^2 dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$.

IV – Le théorème de convergence dominée

Le théorème suivant sera revu dans le chapitre "Suites et séries de fonctions".

Théorème majeur de la théorie de l'intégration de Lebesgue, il est admis en CPGE.

Théorème IV.1 (Théorème de convergence dominée - ADMIS).

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

On suppose que :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite notée $f(t)$;
- la fonction f ainsi définie est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ continue par morceaux et intégrable sur I telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leq \varphi(t).$$

Dans ce dernier point, appelé **hypothèse de domination**, la fonction φ est indépendante de n .

Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est intégrable sur I ;
- la fonction f est intégrable sur I ;
- la suite (numérique) $\left(\int_I f_n(t) dt \right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I f(t) dt$.

$$\text{On a alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_I f_n(t) dt = \int_I \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(t) dt.$$

Remarque. 

- Dans la pratique, les hypothèses de continuité par morceaux pourront être omises.
- Pour la deuxième hypothèse, on commence par fixer t (Soit $t \in I$.) puis on étudie la convergence de la suite numérique $(f_n(t))_{n \in \mathbb{N}}$. Parfois, il est nécessaire de distinguer plusieurs cas selon la valeur de t .

Remarque.  Ce résultat permet d'intervertir les symboles de limite et d'intégrale.

On peut utiliser ce résultat même si I est un segment. Pour cela, deux rédactions sont possibles :

- (1) on pourra utiliser le théorème sur l'intervalle ouvert $]a; b[$, ce qui ne change rien à la valeur des intégrales ;
- (2) on pourra dire qu'une fonction continue par morceaux sur un segment est intégrable sur ce segment et utiliser directement le théorème sur $I = [a; b]$.

Exemple IV.0.2. Étudier la convergence des suites suivantes :

$$(1) (I_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+x^2} dx \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$(2) (J_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left(\int_0^1 \frac{x^n}{1+nx} dx \right)_{n \in \mathbb{N}} ;$$

$$(3) (K_n)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(\int_0^n \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2} dx \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pourra considérer la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = 0$ si $x > n$ et $f_n(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{n}}}{1+x^2}$ si $x \leq n$.