

Chapitre 3 - Compléments d'algèbre linéaire

On désigne par $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels ou l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes.

I – Rappels de première année

Les notions ne sont pas présentées dans l'ordre naturel de leur construction. On s'autorise par exemple à parler de déterminant avant de l'avoir défini. La présentation rigoureuse de tous ces objets a été faite en première année. Ici, on se contente de rappeler des définitions et résultats (et il en manque!), sans démonstration.

1) Familles de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition I.1.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E .

- On définit le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille $(u_1, \dots, u_n)$ (on dit aussi *engendré par les vecteurs* $u_1, \dots, u_n$) noté $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ par :

$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n \right\} = \left\{ x \in E \mid \exists (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i u_i \right\}.$$

- Ainsi, $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $u_1, \dots, u_n$.
- On convient que le sous-espace vectoriel de E engendré par la famille vide est $\{0_E\}$.
- On appelle rang de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ la dimension de $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$.
- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E si $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = E$, autrement dit si tout élément de E peut s'écrire comme combinaison linéaire des vecteurs u_i .

Définition I.1.2. On suppose que $n \geq 1$. Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E .

- On dit que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement indépendants si, pour tous $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{K}$, on a $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$ seulement si tous les λ_i sont nuls, autrement dit :

$$\forall (\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^n, \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E \right) \implies (\forall 1 \leq i \leq n, \lambda_i = 0).$$

- Dans le cas contraire, il existe une liste $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de scalaires **non tous nuls** telle que $\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i = 0_E$. Une telle relation est appelée relation de liaison et on dit alors que la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est liée ou que les vecteurs $u_1, \dots, u_n$ sont linéairement dépendants.
- On convient que la famille vide est libre.

Définition I.1.3.

Une famille finie de vecteurs de E est une base de E si elle est libre et génératrice de E .

Exercice I.1.4.

Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z + 2t = 0 \text{ et } 2x - y + z - t = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ dont on donnera une base.

Théorème I.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que E est de dimension n et est muni d'une base $\mathcal{B}_0$. Soit $\mathcal{B}$ une famille de n vecteurs de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) $\mathcal{B}$ est une base de E ;
- (2) $\mathcal{B}$ est une famille libre;
- (3) $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de E ;
- (4) $\mathcal{B}$ est de rang n (rang qui peut être obtenu matriciellement);
- (5) la matrice A de la famille $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}_0$ est inversible;
- (6) le déterminant de A est non nul.

Exercice I.1.6. Notons $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré au plus 3. On considère la famille

$$\mathcal{B} = (P_0 = (X-1)(X-2)(X-3), P_1 = X(X-2)(X-3), P_2 = X(X-1)(X-3), P_3 = X(X-1)(X-2)).$$

Démontrer que $\mathcal{B}$ est une base de E et déterminer les coordonnées d'un polynôme P de E dans cette base.

Théorème I.7. Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une famille de vecteurs de E .

- $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si, pour tout vecteur x de E , il existe une et une seule famille de scalaires $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ telle que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.
- On dit alors que $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ est la famille des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

- On appelle alors matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ la matrice $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- L'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) &\longrightarrow E \\ \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} &\longmapsto x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \end{aligned}$$

Remarque. Ce résultat montre l'importance de connaître une base. Elle permet de faire du calcul vectoriel en utilisant uniquement les coordonnées des vecteurs. On pourra par exemple utiliser les coordonnées pour démontrer une colinéarité, une liaison entre vecteurs, la liberté d'une famille,... puisqu'une relation entre vecteurs se traduira par la même relation entre les matrices-colonnes de coordonnées.

 Attention, les coordonnées sont un atout précieux mais on ne confondra pas un vecteur x de E avec ses coordonnées dans une base, on écrira :

Le vecteur x a $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ pour coordonnées dans $\mathcal{B}$

OU

Les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ sont $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

OU

La matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

2) Applications linéaires

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Définition I.2.8. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

- (1) On appelle image de f le sous-espace vectoriel de F suivant :

$$\text{Im}(f) = f(E) = \{f(x), x \in E\}.$$

Lorsque $\text{Im}(f)$ est de dimension finie, on appelle rang de f la dimension de $\text{Im}(f)$.

- (2) On appelle noyau de f le sous-espace vectoriel de E suivant :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

Exercice I.2.9. Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E .

- (1) Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$.
 (2) Montrer que :
- $(\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f)) \iff (\text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0_E\})$;
 - $(\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g)) \iff (\text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = E)$.

Théorème I.10. Soit $f : E \longrightarrow F$ linéaire.

- (1) f est injective si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
 On rappelle que l'inclusion $\{0_E\} \subset \text{Ker}(f)$ est toujours vérifiée.
 (2) f est surjective si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.
 On rappelle que l'inclusion $\text{Im}(f) \subset F$ est toujours vérifiée.
 (3) Si E est de dimension finie et que $\mathcal{B}$ est une base de E , alors la famille $f(\mathcal{B})$ est une famille génératrice de $\text{Im}(f)$.

Théorème I.11. Supposons que E et F soient de même dimension finie n . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) f est injective;
 (2) f est surjective;
 (3) f est un isomorphisme;
 (4) $\text{rg}(f) = n$.

On utilisera en particulier ce résultat si f est un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Théorème I.12 (Formule du rang).

- (1) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
 Si E_0 est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E (c'est-à-dire $E = E_0 \oplus \text{Ker}(u)$), alors u induit

un isomorphisme de E_0 sur $\text{Im}(u)$: l'application
$$\begin{array}{ccc} E_0 & \rightarrow & \text{Im}(u) \\ x & \mapsto & u(x) \end{array}$$
 est un isomorphisme.

- (2) On suppose que E est de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors u est de rang fini, $\text{Ker}(u)$ est de dimension finie et

$$\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u)) = \dim(\text{Im}(u)) + \dim(\text{Ker}(u)).$$

Exercice I.2.13. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$ et on définit l'application f de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans lui-même définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), f(M) = AM$.

- (1) Montrer que f est linéaire.
 (2) Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker}(f)$.
 (3) Déterminer une base et la dimension de $\text{Im}(f)$.

Définition - Théorème I.2.14. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ muni d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$. On appelle hyperplan de E tout sous-espace vectoriel de E qui vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

- (1) $\dim(H) = n - 1$;
- (2) il existe une droite vectorielle D telle que $E = H \oplus D$;
- (3) pour tout vecteur x n'appartenant pas à H : $E = H \oplus \text{Vect}(x)$;
- (4) il existe une forme linéaire non nulle φ telle que $H = \text{Ker}(\varphi)$;
- (5) il existe une famille de scalaires non tous nuls $(a_1, \dots, a_n)$ telle que, pour tout vecteur $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ de E :

$$x \in H \iff \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0.$$

Cette relation caractérise les vecteurs de H , on dit que c'est une *équation de H dans la base $\mathcal{B}$* .

Exemple I.2.15. Soit $n \geq 2$. Notons $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Justifier que $H = \left\{ M \in E \mid \sum_{i=1}^n (M)_{i,i} = 0 \right\}$ est un hyperplan de E .

3) Représentations matricielles

On a déjà défini plus haut la matrice-colonne des coordonnées d'un vecteur dans une base. Les matrices permettent de représenter les objets de l'algèbre linéaire *en dimension finie* : vecteurs, familles de vecteurs, bases, applications linéaires.

Définition - Théorème I.3.16 (Matrice d'une famille de vecteurs).

- Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n , muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E .

Il existe une unique famille $(a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ de scalaires tels que, pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$.

- La matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est appelée matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$ et se note $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, les coordonnées de x_j dans la base $\mathcal{B}$ sont les coefficients de la j -ème colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.
- Le rang de $\mathcal{F}$ est celui de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

En particulier, si $n = p$, la famille $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est inversible. Dans ce cas, la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est appelée matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{F}$ et se note $P(\mathcal{B}, \mathcal{F})$ ou $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{F}}$.

Définition - Théorème I.3.17 (Matrice représentative d'une application linéaire).

- Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .
On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ de E et une base $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_n)$ de F .
Soit $u : E \rightarrow F$ une application linéaire de E dans F .
- On appelle matrice (représentative) de u dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ la matrice notée $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ (matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$) définie par :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(e_1), \dots, u(e_p)).$$

- Pour tout $j \in \llbracket 1; p \rrbracket$, la j -ème colonne de $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est formée des coordonnées dans la base $\mathcal{C}$ du vecteur $u(e_j)$.
On rappelle que les vecteurs $u(e_j)$ engendrent $\text{Im}(u)$.
- La matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ a le même rang que u (quelles que soient les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ choisies!).
En particulier, si $n = p$, l'application u est un isomorphisme si et seulement si $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ est inversible.
Dans ce cas : $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)^{-1}$.
- Si $E = F$ (et donc $p = n$), u est un endomorphisme et on choisit souvent $\mathcal{B} = \mathcal{C}$. On note alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$ (matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

Méthode. ✌

Le rang d'une famille de vecteurs est égal au rang de la matrice qui représente cette famille dans une base donnée.
Le rang d'une application linéaire est égal au rang de la matrice qui représente cette application dans des bases données.

Il est donc essentiel de savoir déterminer le rang d'une matrice qui est la dimension de l'espace engendré par les colonnes (ou par les lignes) :

- réaliser des opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes ne change pas le rang d'une matrice;
- on ne change pas le rang d'une matrice en supprimant une ligne/colonne colinéaire à une autre (en particulier une ligne/colonne nulle);
- le rang d'une matrice *échelonnée* est égal au nombre de *pivots*.

Ce vocabulaire ne figure plus au programme officiel, le rang d'une telle matrice pourra être donné directement.

Exercice I.3.18. Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -5 \\ 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Théorème I.19 (Théorème de représentation).

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie p et F un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n .

On considère une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F .

- L'application $\Psi: \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

$$u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$$

- La linéarité de Ψ se traduit par :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E, F)^2, \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u + v) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) + \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(v);$$

$$\forall u \in \mathcal{L}(E, F), \forall \lambda \in \mathbb{K}, \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\lambda u) = \lambda \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

- La bijectivité de Ψ indique qu'une application linéaire est caractérisée par la donnée de sa matrice dans des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ données.

Définition I.3.20. • Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à M l'unique application linéaire $u: \mathbb{K}^p \longrightarrow \mathbb{K}^n$ dont la matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$ est M .

- On appelle alors image de M et noyau de M respectivement l'image et le noyau de u .

On obtient le noyau de M en résolvant directement l'équation $MX = 0_{\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})}$. Dans ce cas, on confond un élément de $\mathbb{K}^p$ (respectivement de $\mathbb{K}^n$) et un élément de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ (respectivement de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$), ce qui est courant.

Les colonnes de M sont alors des vecteurs de $\text{Im}(M)$ (elles engendrent même $\text{Im}(M)$).

- D'après la formule du rang, on a $p = \dim(\text{Ker}(M)) + \dim(\text{Im}(M)) = \dim(\text{Ker}(M)) + \text{rg}(M)$.

Théorème I.21 (Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire).

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. On considère une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F .

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$.

Soit $x \in E$. On note X la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.

Alors AX est la matrice-colonne des coordonnées de $u(x)$ dans $\mathcal{C}$.

Remarque.  Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Considérons le système linéaire $AX = 0$ (par exemple pour déterminer $\text{Ker}(A)$ ou $\text{Ker}(u)$).

- (1) D'après la formule du rang, l'espace vectoriel des solutions est de dimension $p - \text{rg}(A)$ (on dit parfois "nombre d'inconnues" moins "nombre d'équations indépendantes").

- (2) Si on note $C_1, C_2, \dots, C_p$ les colonnes de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors $AX = x_1 C_1 + x_2 C_2 + \dots + x_p C_p$. Cette observation

permet souvent de déterminer une (ou plusieurs) solution par observation des colonnes de A , sans avoir à résoudre explicitement le système!

Exercice I.3.22. (1) On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$. On déterminera des bases de ces espaces.

(2) On note $g: \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$. Déterminer $\text{Ker}(g)$ et $\text{Im}(g)$. L'application g est-elle injective? surjective?

$$P \mapsto \begin{pmatrix} P(1) \\ P'(1) + P''(0) \end{pmatrix}$$

Proposition I.3.23 (Matrice de la composée de deux applications linéaires).

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie.

On considère $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ respectivement des bases de E, F et G .

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. On a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_3}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2, \mathcal{B}_3}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u).$$

En particulier, si u est un endomorphisme de E , alors pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u^k) = (\text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u))^k$.

4) Formules de changement de base

Théorème I.24 (Changement de base pour les coordonnées d'un vecteur).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E .

Soit $x \in E$. On note X la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}$

et on note X' la matrice-colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}'$.

On a alors $X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} X'$ (et donc $X' = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} X = (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1} X$).

Théorème I.25 (Changement de bases pour la matrice d'une application linéaire).

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F . On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$.

On a alors $A' = (P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'})^{-1} \times A \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ (et donc $A = P_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}} \times A' \times (P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'})^{-1}$).

Corollaire I.4.26 (Cas des endomorphismes).

Soient E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On considère $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et on note $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$.

On a alors $A' = P^{-1} A P$ (et donc $A = P A' P^{-1}$).

On peut retenir plus facilement $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$.

Définition - Théorème I.4.27. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $A' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et A' sont semblables s'il existe une matrice inversible P telle que $A = P A' P^{-1}$ (ou $A' = P^{-1} A P$).

D'après ce qui précède, deux matrices A et A' sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans des bases différentes.

Deux matrices semblables ont le même rang, le même déterminant et la même trace (voir la suite du cours).

Proposition I.4.28. Soient A, B et C trois matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Si A et B sont semblables et si B et C sont semblables, alors A et C sont semblables.

Exercice I.4.29. On note $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que A et D sont semblables.

On commencera par considérer l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

(2) Expliciter une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $A = P D P^{-1}$.

(3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice D^n puis la matrice A^n .

5) Interpolation de Lagrange

Définition - Théorème I.5.30. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de $(n+1)$ scalaires distincts. On considère alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

(1) φ est un isomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$ dans $\mathbb{K}^{n+1}$.

Nous venons de démontrer que, pour tout $(b_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que $P(a_k) = b_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$. Par exemple, dans le cas $n = 2$, il existe une et une seule droite ou parabole qui passe par trois points donnés. Dans la suite, nous allons exprimer le polynôme P .

(2) Pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on note

$$L_k = \frac{1}{\prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (a_k - a_i)} \times \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (X - a_i).$$

Les polynômes $L_0, L_1, \dots, L_n$ sont appelés polynômes interpolateurs de Lagrange.

(a) La famille $\mathcal{L} = (L_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. De plus, pour tout $P \in \mathbb{K}_n[X]$:

$$P = \sum_{k=0}^n P(a_k) L_k.$$

(b) On a en particulier $\sum_{k=0}^n L_k = 1$.

(c) Soit $(b_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$. L'unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que $P(a_k) = b_k$ pour tout $0 \leq k \leq n$ est :

$$\varphi^{-1}(b_0, \dots, b_n) = \sum_{k=0}^n b_k L_k.$$

II – Trace

Désormais, si une matrice est notée A , on notera $(A)_{i,j}$ le coefficient de A à la i -ème ligne et j -ème colonne.

Définition II.0.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute matrice carrée $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de A et on note $\text{tr}(A)$ le scalaire

$$\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n (A)_{i,i}.$$

Proposition II.0.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- (1) L'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- (2) Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\text{tr}(A^T) = \text{tr}(A)$.
- (3) Pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
Ce résultat reste vrai si les matrices A et B appartiennent à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- (4) Deux matrices semblables ont la même trace.

Définition - Théorème II.0.3. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E .

La trace de $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ de E choisie.

On définit alors la trace de f et on note $\text{tr}(f)$ la trace de la matrice de f dans n'importe quelle base $\mathcal{B}$ de E .

Exercice II.0.4. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Soit p un projecteur de E . Démontrer que $\text{tr}(p) = \text{rg}(p)$.

On commencera par écrire la matrice de p dans une base bien choisie.

III – Somme de sous-espaces vectoriels

1) Rappels de première année : somme de 2 sous-espaces vectoriels

Définition III.1.1. • Soit E un espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E .

On définit la somme de F et G par

$$F + G = \{y + z, (y, z) \in F \times G\}.$$

$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient F et G .

- Si $F \cap G = \{0_E\}$, on dit que F et G sont en somme directe et on note $F + G = F \oplus G$.
- Si $F \oplus G = E$, on dit que F et G sont supplémentaires dans E .

Théorème III.2. Soit E un espace vectoriel.

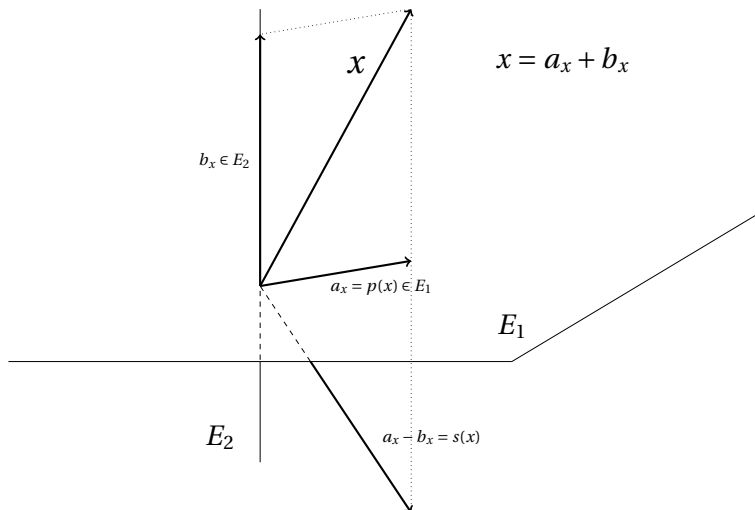
- (1) Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si :
pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(a_x, b_x) \in F \times G$ tel que $x = a_x + b_x$.
- (2) Supposons que E est de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E respectivement munis de bases $(e_1, \dots, e_p)$ et $(e_{p+1}, \dots, e_n)$.
 F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si la famille $(e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ est une base de E .
On dit que cette base est adaptée à la somme directe $F \oplus G$.
- (3) Supposons que E est de dimension finie.
Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont supplémentaires dans E si et seulement si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ et $F \cap G = \{0_E\}$.
En général, on a $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$.

Exercice III.1.3.

On note E l'espace vectoriel des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $F = \text{Vect}(\sin, \cos)$ et $G = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$.
Démontrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

Définition III.1.4. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

- On appelle projection sur E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme p de E tel que $p|_{E_1} = \text{Id}_{E_1}$ et $p|_{E_2} = 0_{\mathcal{L}(E_2, E)}$ (application nulle).
- Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(a_x, b_x) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = a_x + b_x$. On a alors $p(x) = a_x$ et $b_x = x - p(x)$.
 $p(x)$ est donc l'unique vecteur de E_1 tel que $x - p(x) \in E_2$.
- On a $\text{Im}(p) = E_1 = \text{Ker}(p - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid p(x) = x\}$ et $\text{Ker}(p) = E_2 = \{x - p(x), x \in E\}$.



Définition III.1.5. On appelle projecteur de E tout endomorphisme f de E tel que $f \circ f = f$.

Théorème III.6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- (1) Si f est la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , alors $f \circ f = f$ (f est un projecteur).
- (2) Si f est un projecteur, alors $\text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f) = E$ et f est la projection sur $\text{Im}(f)$ parallèlement à $\text{Ker}(f)$.

Définition III.1.7. Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E .

- On appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'endomorphisme s de E tel que $s|_{E_1} = \text{Id}_{E_1}$ et $s|_{E_2} = -\text{Id}_{E_2}$.
- Soit $x \in E$. Il existe un unique couple $(a_x, b_x) \in E_1 \times E_2$ tel que $x = a_x + b_x$. On a alors $s(x) = a_x - b_x$.
- En reprenant les notations de la définition de *projection*, on a $s = 2p - \text{Id}_E$.
- On a $E_1 = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $E_2 = \text{Ker}(s + \text{Id}_E) = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$.

Théorème III.8. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

- (1) Si f est la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 , alors $f \circ f = \text{Id}_E$. En particulier $f \in \text{GL}(E)$ et $f^{-1} = f$.
- (2) Si $f \circ f = \text{Id}_E$, alors $\text{Ker}(f - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(f + \text{Id}_E) = E$ et f est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(f - \text{Id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(f + \text{Id}_E)$.

Exercice III.1.9. ✂ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^T = -A\}$ l'ensemble des matrices antisymétriques de $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note également $s: A \mapsto A^T$.

- (1) Démontrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont deux sous-espaces vectoriels de E supplémentaires dans E .
- (2) Déterminer une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n-1)}{2}$.
- (3) En déduire $\det(s)$ et $\text{tr}(s)$.

2) Cas général

Définition - Théorème III.2.10. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. On note $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ et on munit cet ensemble des opérations suivantes :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E, \forall (y_1, \dots, y_p) \in E, (x_1, \dots, x_p) + (y_1, \dots, y_p) = (x_1 + y_1, \dots, x_p + y_p),$$

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (x_1, \dots, x_p) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_p).$$

Pour des raisons évidentes de simplicité, on a noté $+$ et $\cdot$. l'addition et la multiplication externe dans les différents espaces vectoriels. Muni de ces opérations, E est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Exemple III.2.11. Dans le cas où $E_1 = \dots = E_p = \mathbb{K}$, on retrouve l'espace vectoriel $E = \mathbb{K}^p$.

Proposition III.2.12. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soient $E_1, \dots, E_p$ des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels **de dimension finie**. $E = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est alors de dimension finie et

$$\dim(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \sum_{i=1}^p \dim(E_i).$$

Définition - Théorème III.2.13.

- Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

On définit la somme des F_i notée $\sum_{i=1}^p F_i$ par :

$$\sum_{i=1}^p F_i = \{x_1 + \dots + x_p, (x_i)_{1 \leq i \leq p} \in F_1 \times \dots \times F_p\}.$$

$\sum_{i=1}^p F_i$ est un sous-espace vectoriel de E qui contient les sous-espaces F_i .

- On dit que les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots \times F_p, \sum_{i=1}^p x_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, x_i = 0_E.$$

Le vecteur nul se décompose de manière unique comme somme d'éléments de $F_1, \dots, F_p$.

On note alors $F_1 \oplus \dots \oplus F_p$ ou encore $\bigoplus_{i=1}^p F_i$ à la place de $\sum_{i=1}^p F_i$.

- Si les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe et que l'on considère au moins 2 sous-espaces parmi ceux-là, alors ils sont également en somme directe. On signale que si $p = 1$, la somme est toujours directe!

Remarque.

- On doit vérifier dans le cas $p = 2$ que cette définition est bien équivalente à celle donnée en première année : F et G sont en somme directe si $F \cap G = \{0_E\}$.
 -  On peut avoir $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$, $F_1 \cap F_3 = \{0_E\}$ et $F_2 \cap F_3 = \{0_E\}$ sans que F_1, F_2 et F_3 ne soient en somme directe. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, on peut considérer $F_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$, $F_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $F_3 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

-  Si on connaît une famille génératrice $\mathcal{G}_i$ de chaque sous-espace F_i , on obtient une famille génératrice de $\sum_{i=1}^p F_i$ en réunissant tous les vecteurs des familles $\mathcal{G}_i$.

Par exemple, considérons $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F_1 = \text{Vect}(1, X^3)$, $F_2 = \text{Vect}(X, X^4)$ et $F_4 = \text{Vect}(X^3 + X, X^2)$. On a $E = F_1 + F_2 + F_4$.

- On a également montré en première année que n'importe quelle intersection de sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel de E .

Théorème III.14 (Caractérisation de la somme directe par l'unicité de la décomposition).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

Les sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe si et seulement si, pour tout $x \in \sum_{i=1}^p F_i$,

il existe un unique $(x_i)_{1 \leq i \leq p} \in F_1 \times \dots \times F_p$ tel que $x = \sum_{i=1}^p x_i$.

Remarque.  Ce résultat ne signifie pas que tout vecteur de E peut se décomposer de manière unique en somme de vecteurs de $F_1, \dots, F_p$. Si on veut montrer un tel résultat, on doit montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$:

- montrer que les F_i sont des sous-espaces vectoriels de E ;
- montrer que tout vecteur de E peut s'écrire comme une somme de vecteurs de $F_1, \dots, F_p$;
- montrer que les F_i sont en somme directe (ou que la décomposition obtenue au point précédent est unique).

Exemple III.2.15. On note $E = \mathbb{R}^4$, $F_1 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$, $F_2 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ et $F_3 = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$. Démontrer que $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Théorème III.16 (Caractérisation de $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ à l'aide de bases).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

Pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on munit F_i d'une base $\mathcal{B}_i$. On note $\mathcal{B}$ la famille de vecteurs obtenue en concaténant les bases $\mathcal{B}_i$.

La famille $\mathcal{B}$ est une base de E si et seulement si $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ et on a $\dim(E) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

Remarque.  Concaténer des familles de vecteurs consiste à les mettre bout à bout et non à les réunir comme on le ferait avec des ensembles. Les répétitions sont autorisées! Par exemple, dans $E = \mathbb{R}_4[X]$, si $\mathcal{B}_1 = (1, X, X^3)$, $\mathcal{B}_2 = (X^2, X^3)$ et $\mathcal{B}_3 = (X^4)$, la famille $\mathcal{B}$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^3, X^2, X^3, X^4)$. On voit immédiatement qu'elle est liée.

Méthode.  Si on connaît une base $\mathcal{B}$ de E , on peut décomposer E en une somme directe, c'est-à-dire définir des sous-espaces $F_1, \dots, F_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

Pour cela, on considère des familles de vecteurs $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p$ de sorte qu'en concaténant les familles $\mathcal{B}_i$ (et en écrivant les vecteurs dans un certain ordre!) on obtienne la famille $\mathcal{B}$. On note alors $F_i = \text{Vect}(\mathcal{B}_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$.

Exemple III.2.17. On note $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F_1 = \text{Vect}(1, X^3)$, $F_2 = \text{Vect}(X, X^4)$ et $F_3 = \text{Vect}(X^2)$. On a $E = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3$.

Corollaire III.2.18 (Dimension de la somme).

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E **de dimension finie**.

On a alors $\sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ de dimension finie.

(1) Si les sous-espaces F_i sont en somme directe, alors $\dim \left(\bigoplus_{i=1}^p F_i \right) = \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$.

(2) En général,

$$\dim \left(\sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i),$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

Exemple III.2.19. On note $E = \mathbb{R}_4[X]$, $F_1 = \text{Vect}(1, X^3)$, $F_2 = \text{Vect}(X, X^4)$ et $F_4 = \text{Vect}(X^3 + X, X^2)$.
On a déjà vu que $E = F_1 + F_2 + F_4$ mais la somme n'est pas directe.

Corollaire III.2.20. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit E un espace vectoriel **de dimension finie**. Soient $F_1, \dots, F_p$ des sous-espaces vectoriels de E .

- (1) Si les sous-espaces F_i sont en somme directe et si $\sum_{i=1}^p \dim(F_i) = \dim(E)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.
- (2) Si $E = \sum_{i=1}^p F_i$ et si $\sum_{i=1}^p \dim(F_i) = \dim(E)$, alors $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$.

3) Exercice complémentaire : famille de projecteurs associés à une somme directe

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit E un espace vectoriel. Soient $F_1, \dots, F_n$ des sous-espaces vectoriels de E .

On suppose que $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

(1) Démontrer que F_1 et $\bigoplus_{i=2}^n F_i$ sont supplémentaires dans E .

On note alors p_1 la projection sur F_1 parallèlement à $\bigoplus_{i=2}^n F_i$.

Sans démonstration on définit, pour tout $j \in \llbracket 2; n \rrbracket$, la projection p_j sur F_j parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n F_i$.

(2) Démontrer que $\text{Id}_E = \sum_{j=1}^n p_j$ (égalité entre applications).

(3) Démontrer que, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$:

$$p_i \circ p_j = \begin{cases} 0_{\mathcal{L}(E)} & \text{si } i \neq j \\ p_i & \text{si } i = j \end{cases}.$$

On dit que la famille $(p_j)_{1 \leq j \leq n}$ est la famille de projecteurs associée à la décomposition $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$.

IV – Matrices par blocs

1) Définitions et opérations par blocs

Définition IV.1.1. Soient n et p des entiers naturels non nuls. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On dit que la matrice A est écrite par blocs si on peut la partager en sous-matrices (appelées blocs) en respectant les règles suivantes :

- les coefficients sont écrits dans le même ordre dans les blocs et dans la matrice A ;
- les blocs situés sur une même colonne ont le même nombre de colonnes;
- les blocs situés sur une même ligne ont le même nombre de lignes.

Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 8 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 6 & 5 & -3 \end{pmatrix}$, la matrice A peut s'écrire par blocs $A = \begin{pmatrix} I_2 & A_{1,2} & A_{1,3} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} \end{pmatrix}$ en notant

$$A_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, A_{1,3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, A_{2,1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, A_{2,2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } A_{2,3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Exemple IV.1.2.

Soient E un espace vectoriel de dimension finie. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E de dimensions respectives $r \geq 1$ et $p \geq 1$ (de sorte que $r + p = \dim(E)$). Dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$:

- la matrice de la projection sur F parallèlement à G s'écrit $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p} \\ 0_{p,r} & 0_{p,p} \end{pmatrix}$;
- la matrice de la symétrie par rapport à F parallèlement à G s'écrit $\begin{pmatrix} I_r & 0_{r,p} \\ 0_{p,r} & -I_p \end{pmatrix}$.

Définition IV.1.3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- On dit que A est diagonale par blocs si elle peut s'écrire par blocs avec des blocs carrés sur la diagonale et des blocs nuls partout ailleurs.
- On dit que A est triangulaire supérieure par blocs (respectivement inférieure) si elle peut s'écrire par blocs avec des blocs carrés sur la diagonale et des blocs nuls en dessous de la diagonale (respectivement au-dessus de la diagonale).

Par exemple, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,1} & 0 \\ 0 & A_{2,2} \end{pmatrix}$ est diagonale par blocs

et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & B_{1,3} \\ 0 & B_{2,2} & B_{2,3} \\ 0 & 0 & B_{3,3} \end{pmatrix}$ est triangulaire (supérieure) par blocs.

Proposition IV.1.4.

- (1) Soient A et B deux matrices de même taille écrites par blocs également de mêmes tailles. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. La matrice $A + \lambda B$ s'obtient en réalisant cette même opération bloc par bloc.
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$, alors $A + \lambda B = \begin{pmatrix} A_{1,1} + \lambda B_{1,1} & A_{1,2} + \lambda B_{1,2} \\ A_{2,1} + \lambda B_{2,1} & A_{2,2} + \lambda B_{2,2} \end{pmatrix}$.
- (2) Soient n, p et q trois entiers naturels non nuls. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,q}$ et $B \in \mathcal{M}_{q,p}$ deux matrices écrites par blocs. Si les tailles des blocs sont compatibles avec ces opérations, on obtient la matrice $AB \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ en appliquant la formule du produit matriciel aux blocs.
Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} \\ B_{2,1} & B_{2,2} \end{pmatrix}$, alors $AB = \begin{pmatrix} A_{1,1}B_{1,1} + A_{1,2}B_{2,1} & A_{1,1}B_{1,2} + A_{1,2}B_{2,2} \\ A_{2,1}B_{1,1} + A_{2,2}B_{2,1} & A_{2,1}B_{1,2} + A_{2,2}B_{2,2} \end{pmatrix}$.
On peut observer que les nombres de colonnes des blocs de la première matrice doivent être les nombres de lignes des blocs de la seconde.

Corollaire IV.1.5.

- (1) Si A et B sont deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) par blocs et que les blocs diagonaux de A sont de mêmes tailles que ceux de B , alors le produit AB est une matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) par blocs.
- (2) Si A et B sont deux matrices diagonales par blocs et que les blocs diagonaux de A sont de mêmes tailles que ceux de B , alors le produit AB est une matrice diagonale par blocs.

Exercice IV.1.6. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On définit par blocs la matrice

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K}).$$

Montrer que A est inversible si et seulement si $\alpha - LC \neq 0$ (on identifie la matrice LC à un scalaire). Dans ce cas, déterminer A^{-1} .

On cherchera une matrice $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ écrite par blocs $B = \begin{pmatrix} \beta & L' \\ C' & B' \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$ solution de $AB = I_{n+1}$.

2) Sous-espaces stables

Définition IV.2.7. Soit E un espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E . Soit F un sous-espace vectoriel de E .

On dit que F est stable par u si $u(F) \subset F$, c'est-à-dire si, pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Dans ce cas, on dit que u induit l'endomorphisme de F noté $\tilde{u}$ défini par :

$$\begin{array}{ccc} \tilde{u} : & F & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & u(x) \end{array}$$

Proposition IV.2.8. Soit E un espace vectoriel. Soient u et v deux endomorphismes de E .
Si $u \circ v = v \circ u$ (u et v commutent), alors $\text{Ker}(v)$ et $\text{Im}(v)$ sont stables par u .
En particulier $\text{Ker}(u)$ et $\text{Im}(u)$ sont stables par u .

Théorème IV.9. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p \geq 1$.
On considère $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_p)$ une base de F et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$ une base de E obtenue en complétant la famille libre $\mathcal{B}_1$.
On dit que $\mathcal{B}$ est une base adaptée au sous-espace vectoriel F . Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

F est stable par u si et seulement si A est de la forme $\begin{pmatrix} A_1 & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ où $A_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p, n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{K})$.

Dans ce cas, en notant $\tilde{u}$ l'endomorphisme de F induit par u , on a $A_1 = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1}(\tilde{u})$.

Exemple IV.2.10. Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E .

- (1) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) = \{x \in E \mid f(x) = \lambda x\}$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f .
- (2) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E) \neq \{0_E\}$, alors l'endomorphisme induit par f sur $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$ est $\lambda \text{Id}_{\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)}$ et dans une base adaptée à $\text{Ker}(f - \lambda \text{Id}_E)$, la matrice de f est de la forme $\begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$.

Théorème IV.11. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit triangulaire supérieure par blocs;

(2) il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ et les sous-espaces $F_1, F_1 \oplus F_2, F_1 \oplus F_2 \oplus F_3, \dots$

(de la forme $\bigoplus_{i=1}^k F_i$) sont stables par u .

Théorème IV.12. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(1) Il existe une base $\mathcal{B}$ de E telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ soit diagonale par blocs;

(2) il existe des sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_p$ de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^p F_i$ et les sous-espaces $F_1, F_2, \dots, F_p$ sont stables par u .

V – Déterminant

1) Rappels de première année

Méthode. ✌

Grâce aux règles suivantes, on simplifie le calcul du déterminant d'une matrice carrée : faire apparaître des zéros (avant de développer par rapport à une ligne/colonne), faire apparaître des factorisations ...

- Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
- Un déterminant dont une colonne/ligne est formée de zéros est nul.
- Un déterminant dont une colonne/ligne est combinaison linéaire des autres est nul.
- L'échange de deux colonnes/lignes multiplie le déterminant par (-1) .
- Si on multiplie une colonne/ligne par $\lambda \in \mathbb{K}$, le déterminant est multiplié par λ .
- Si on multiplie tous les coefficients d'une matrice par λ , le déterminant est multiplié par λ^n .
- La valeur d'un déterminant est inchangée si l'on ajoute à une colonne/ligne un multiple d'une autre.
- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle la formule de développement par rapport à la ligne L_{i_0} :

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i_0+j} (A)_{i_0,j} m_{i_0,j}$$

où $(A)_{i,j}$ désigne le coefficient de A en position (i, j) et $m_{i,j}$ le déterminant de la matrice obtenue à partir de A en supprimant la i -ème ligne et la j -ème colonne.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On rappelle la formule de développement par rapport à la colonne C_{j_0} :

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j_0} (A)_{i,j_0} m_{i,j_0}.$$

Exercice V.1.1 (Calcul d'un déterminant tridiagonal). Soient α et β deux réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le déterminant (à n lignes et colonnes)

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha + \beta & \alpha\beta & & & \\ & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta & \\ & & 1 & \alpha + \beta & \alpha\beta \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & & \ddots & \ddots & \ddots & \alpha\beta \\ & & & & 1 & \alpha + \beta \end{vmatrix}.$$

- (1) Écrire une relation entre Δ_{n+2} , Δ_{n+1} et Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
- (2) En déduire Δ_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, α et β .

Proposition V.1.2. • Pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det(AB) = \det(A) \times \det(B).$$

- Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Si A est inversible, alors

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

- Deux matrices semblables ont le même déterminant.
- Une matrice et sa transposée ont le même déterminant.

Exercice V.1.3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer pour quelle(s) valeur(s) du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ la matrice $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. Pour chaque valeur de λ obtenue, déterminer $\text{Ker}(A - \lambda I_3)$. On donnera une base de chacun de ces sous-espaces.

Définition - Théorème V.1.4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $\mathcal{B}$ une base de E .

- (1) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Le déterminant de la famille $(u_1, \dots, u_n)$ dans $\mathcal{B}$ se note $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n)$ et : $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n))$.

- (2) Soit $\mathcal{B}'$ une base de E . Pour toute famille de n vecteurs $(u_1, \dots, u_n)$, on a :

$$\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n),$$

autrement dit : $\det_{\mathcal{B}} = \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \det_{\mathcal{B}'}$ (égalité entre applications).

- (3) Soit $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E . $(u_1, \dots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n) \neq 0$.

Remarque. Même si le cours est axé sur les méthodes pratiques de calcul ainsi que les diverses utilisations des déterminants, on rappelle la définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base $\mathcal{B}$ de E :

$\det_{\mathcal{B}}$ est l'unique application de E^n dans $\mathbb{K}$ qui soit n -linéaire, alternée et qui vérifie $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$.

Proposition V.1.5. • Soit f un endomorphisme de E . Le déterminant de la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ ne dépend pas de la base $\mathcal{B}$ choisie et se note tout simplement $\det(f)$.

- $\forall f \in \mathcal{L}(E), \forall \alpha \in \mathbb{K}, \det(\alpha f) = \alpha^n \det(f)$.
- $\forall (f, g) \in \mathcal{L}(E)^2, \det(f \circ g) = \det(f) \times \det(g)$.
- Soit f un endomorphisme de E . f est un isomorphisme (un automorphisme de E donc) si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
- Soit f un automorphisme de E . Alors, $\det(f^{-1}) = \frac{1}{\det(f)}$.

Remarque. Même si le cours est axé sur les méthodes pratiques de calcul ainsi que les diverses utilisations des déterminants, on rappelle la définition du déterminant d'un endomorphisme de E de dimension finie :

$\det(f)$ est l'unique scalaire tel que, pour toute base $\mathcal{B}$ de E et toute famille $(u_1, \dots, u_n)$ de vecteurs de E :

$$\det_{\mathcal{B}}(f(u_1), \dots, f(u_n)) = \det(f) \det_{\mathcal{B}}(u_1, \dots, u_n).$$

2) Déterminant triangulaire par blocs

Proposition V.2.6. Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des déterminants des blocs diagonaux. En particulier, c'est le cas des matrices diagonales par blocs.

Remarque.  **Aucun autre résultat sur le calcul par blocs** d'un déterminant. N'en inventez pas!

3) Déterminant de Vandermonde

Définition - Théorème V.3.7.

Soit $n \geq 2$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde de la famille $(a_1, \dots, a_n)$ le scalaire suivant :

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

- (1) On a $V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i) = (a_2 - a_1)(a_3 - a_2)(a_3 - a_1) \dots (a_n - a_{n-1}) \dots (a_n - a_1)$.

- (2) $V_n(a_1, \dots, a_n) \neq 0$ si et seulement si les a_i sont n scalaires distincts.

Exemple V.3.8 (Interpolation de Lagrange).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ une famille de $(n+1)$ scalaires distincts. On considère alors l'application

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n)) \end{aligned}.$$

Le but est de (re)démontrer que φ est un isomorphisme.

Notons $\mathcal{B} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

La matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ est :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de φ est donc un déterminant de Vandermonde et, d'après ce qui précède, il est non nul.

Ainsi, $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\varphi)$ est inversible et on retrouve ainsi que φ est un isomorphisme.

VI – Polynôme d'endomorphisme et de matrice carrée

1) Définition - Propriétés

Définition VI.1.1 (Puissances d'endomorphisme - Polynôme d'endomorphisme).

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E .

(1) On définit $u^0 = \text{Id}_E$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, u^k = u \circ u^{k-1}.$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$u^k = \underbrace{u \circ u \circ \dots \circ u}_{k \text{ termes}}.$$

(2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On définit alors l'**endomorphisme** $P(f) \in \mathcal{L}(E)$ par :

$$P(f) = \sum_{k=0}^n a_k f^k = a_n f^n + \dots + a_1 f + a_0 \text{Id}_E.$$

Définition VI.1.2 (Puissances de matrice carrée - Polynôme de matrice carrée).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

(1) On définit $A^0 = I_n$ et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, A^k = A \times A^{k-1}.$$

Si $k \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$A^k = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{k \text{ termes}}.$$

(2) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Il existe donc $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$.

On définit alors la **matrice carrée** $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ par :

$$P(A) = \sum_{k=0}^n a_k A^k = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 I_n.$$

Remarque. ✌ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit u un endomorphisme de E . Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}$.

Alors $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$: la matrice représentative de l'endomorphisme $P(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice $P(A)$.

Exercice VI.1.3. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

Montrer que, s'il existe une matrice inversible Q telle que $A = QBQ^{-1}$, alors $P(A) = QP(B)Q^{-1}$.

On pourra utiliser (ou pas!) la remarque précédente.

Exemple VI.1.4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont notés $\lambda_1, \dots, \lambda_n$:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \star & \star & \dots & \star \\ 0 & \lambda_2 & \star & \dots & \star \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \lambda_{n-1} & \star \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(A)$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $P(\lambda_1), \dots, P(\lambda_n)$.

Proposition VI.1.5. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E . Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les règles de calcul suivantes :

- $1_{\mathbb{K}[X]}(u) = \text{Id}_E$.
- $(P + Q)(u) = P(u) + Q(u)$;
- $(\lambda P)(u) = \lambda P(u)$;
- $(PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$ (composé d'endomorphismes). En particulier, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

Corollaire VI.1.6. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E . Soit P dans $\mathbb{K}[X]$. Le noyau et l'image de $P(u)$ sont stables par u .

Proposition VI.1.7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Soient P et Q dans $\mathbb{K}[X]$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a les règles de calcul suivantes :

- $1_{\mathbb{K}[X]}(A) = I_n$.
- $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$;
- $(\lambda P)(A) = \lambda P(A)$;
- $(PQ)(A) = P(A) \times Q(A)$ (produit matriciel). En particulier, $P(A)$ et $Q(A)$ commutent.

Exemple VI.1.8. On a la relation

$$(X + 1)(2X + 2) = 2X^2 + 4X + 2 \quad (\text{égalité entre polynômes})$$

donc on peut écrire directement

$$(A + I_n)(2A + 2I_n) = 2A^2 + 4A + 2I_n \quad (\text{égalité entre matrices carrées})$$

et

$$(u + \text{Id}_E) \circ (2u + 2\text{Id}_E) = 2u^2 + 4u + 2\text{Id}_E \quad (\text{égalité entre endomorphismes de } E).$$

2) Polynômes annulateurs

Définition VI.2.9. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit u un endomorphisme de E .

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de u si l'endomorphisme $P(u)$ est l'endomorphisme nul ($0_{\mathcal{L}(E)}$).

Définition VI.2.10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de A si la matrice $P(A)$ est la matrice nulle.

Remarque. Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie muni d'une base $\mathcal{B}$. Soit u un endomorphisme de E . Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Notons $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{B}$.

On a déjà vu que $P(A) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P(u))$ donc P est un polynôme annulateur de u si et seulement si P est un polynôme annulateur de A .

Exercice VI.2.11. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Démontrer qu'il existe un polynôme non nul annulateur de u .

On pourra considérer la famille d'endomorphismes $(\text{Id}_E, u, u^2, \dots, u^{n^2})$.

Proposition VI.2.12. (1) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

- L'ensemble des polynômes annulateurs de u est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Si P est un polynôme annulateur de u et Q un polynôme, alors le polynôme PQ est également annulateur de u .

(2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

- L'ensemble des polynômes annulateurs de A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
- Si P est un polynôme annulateur de A et Q un polynôme, alors le polynôme PQ est également annulateur de A .

Exemple VI.2.13. (1) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Les seuls endomorphismes de E admettant pour polynôme annulateur un polynôme de degré 1 sont les homothéties.

On rappelle qu'une homothétie est un endomorphisme de E de la forme $x \mapsto \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{K}$.

(2) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Les projecteurs de E sont les endomorphismes de E qui admettent pour polynôme annulateur $X^2 - X$.

(3) Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Les symétries de E sont les endomorphismes de E qui admettent pour polynôme annulateur $X^2 - 1$.

(4) On appelle *endomorphisme nilpotent* tout endomorphisme de E qui admet pour polynôme annulateur un polynôme de la forme X^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

On appelle *matrice nilpotente* toute matrice qui admet pour polynôme annulateur un polynôme de la forme X^k ($k \in \mathbb{N}^*$).

Exercice VI.2.14. On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Vérifier que $P = (X - 2)(X - 4)$ est un polynôme annulateur de A .

(2) En utilisant une forme développée de P , montrer que A est inversible et calculer son inverse.

On cherchera à faire apparaître une matrice B telle que $AB = I_3$.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}$.

(a) Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par P .

(b)  En déduire une expression de A^n .