Chapitre 6 - Espaces préhilbertiens réels - Espaces euclidiens

Sauf mention du contraire, n désigne un entier naturel non nul.

I – Définitions

1) Produit scalaire

Définition I.1.1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On appelle produit scalaire sur E toute application S de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ telle que

- S est bilinéaire (c'est-à-dire linéaire par rapport à chacune de ses variables) :

$$\forall (x_1, x_2, y) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ S(x_1 + \lambda x_2, y) = S(x_1, y) + \lambda S(x_2, y),$$

$$\forall (x, y_1, y_2) \in E^3,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ S(x, y_1 + \lambda y_2) = S(x, y_1) + \lambda S(x, y_2);$$

- S est symétrique :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ S(y, x) = S(x, y);$$

- S est définie positive :

$$\forall x \in E,\ S(x, x) \geq 0 \text{ (on dit que } S \text{ est positive)};$$

$$\forall x \in E,\ ((S(x, x) = 0) \Rightarrow (x = 0_E)) \text{ (appelé caractère défini de S)}$$

Remarque. (1) On dit qu'un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positive mais il faut connaître le sens de tous ces termes !

(2) ✍ On commencera par s'assurer que S est bien définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, pour tout $(x, y) \in E$, $S(x, y)$ existe bien et est un réel.

(3) ✍ Si on commence par démontrer que S est symétrique, il suffit de démontrer la linéarité par rapport à la première variable, l'autre s'en déduit.

$$S(x, y_1 + \lambda y_2) = S(y_1 + \lambda y_2, x) = S(y_1, x) + \lambda S(y_2, x) = S(x, y_1) + \lambda S(x, y_2).$$

(4) Souvent, l'application S ne porte pas de nom explicite et $S(x, y)$ se note $\langle x, y \rangle$, $(x|y)$, $\langle x|y \rangle$,...

Proposition I.1.2. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle .,. \rangle$.*

(1) Pour tout $x \in E$, $\langle 0_E, x \rangle = 0$.

(2) En particulier, $\langle 0_E, 0_E \rangle = 0$ donc le caractère défini pourrait s'écrire comme une équivalence.

Définition I.1.3. (1) On appelle espace préhilbertien (réel) un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire.

(2) On appelle espace euclidien un espace préhilbertien de dimension finie.

Exemple I.1.4 (PRODUITS SCALAIRES USUELS). (1) $E = \mathbb{R}^n$ et

$$\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Si on assimile les éléments de $\mathbb{R}^n$ à des matrices-colonnes : $\langle X, Y \rangle = X^T Y$.

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique (ou usuel) sur $\mathbb{R}^n$.

(2) $E = \mathbb{R}_n[X]$ (également possible si $E = \mathbb{R}[X]$) et

$$\langle \sum_{k=0}^{n} a_k X^k, \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \rangle = \sum_{k=0}^{n} a_k b_k.$$

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique (ou usuel) sur $\mathbb{R}_n[X]$ (le cas échéant sur $\mathbb{R}[X]$).

(3) $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et, pour toutes matrices A et B de E :

$$\langle A, B \rangle = \mathrm{tr}(A^T B) = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} (A)_{i,j} (B)_{i,j}.$$

Ce produit scalaire est appelé produit scalaire canonique (ou usuel) sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

(4) $E = \mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ et, pour toutes fonctions f et g de E : $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

Si on suppose seulement les fonctions continues par morceaux sur $[a;b]$, on perd le caractère défini !

Exercice I.1.5. (1) $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour tous polynômes P et Q de E : $\langle P|Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.

(2) $E = \mathbb{R}[X]$ et, pour tous polynômes P et Q de E : $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$.

Exercice I.1.6 (Classique mais hors-programme). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ qui n'est pas un segment.
On note $L^2_c(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$ telle que f^2 est intégrable sur I.

(1) Montrer que si f et g appartiennent à $L^2_c(I, \mathbb{K})$, alors la fonction fg est intégrable sur I.

(2) Montrer que $L^2_c(I, \mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

(3) Démontrer que l'application $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle = \displaystyle\int_I fg$ est un produit scalaire sur $L^2_c(I, \mathbb{R})$.

2) Inégalité de Cauchy-Schwarz

Proposition I.2.7 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit* $(E, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertien. Pour tout* $(x, y) \in E^2$,

$$\langle x, y\rangle^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$$

avec égalité si et seulement si la famille (x, y) *est liée.*
Cette inégalité peut également s'écrire :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ |\langle x, y\rangle| \leq \sqrt{\langle x, x\rangle}\sqrt{\langle y, y\rangle}.$$

Corollaire I.2.8 (Cas particuliers de Cauchy-Schwarz)**.**

(1)

$$\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,\ \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(2)

$$\forall (f, g) \in \mathscr{C}^0([a; b], \mathbb{R})^2,\ \left(\int_a^b f(t)g(t)dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(t)^2 dt\right)\left(\int_a^b g(t)^2 dt\right).$$

Conséquence : $\forall (f, g) \in \mathscr{C}^0([a; b], \mathbb{K})^2,\ \left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right|^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)g(t)|dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt\right)\left(\int_a^b |g(t)|^2 dt\right).$

Remarque. ⚠ L'application $(f, g) \mapsto \int_a^b f(t)g(t)dt$ est une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace des fonctions seulement continues **par morceaux** sur le segment $[a; b]$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz peut également être écrite. En revanche, le cas d'égalité ne peut être écrit comme pour les fonctions continues ...

3) Norme euclidienne

Définition I.3.9. On appelle norme sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E toute application N de E dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

- $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$ (*homogénéité*),
- $\forall x \in E,\ (N(x) = 0) \Longrightarrow (x = 0_E)$ (*séparation*),
- $\forall (x, y) \in E^2,\ N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ (*inégalité triangulaire*).

Exemple I.3.10. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$. Le module est une norme sur le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$.

Proposition I.3.11. *Soit* $(E, \langle .,. \rangle)$ *un espace préhilbertien. L'application*

$$\begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}$$

est une norme sur E appelée norme euclidienne (associée à $\langle .,. \rangle$*) et notée* $\|.\|$.

Remarque. ✍ Soit $(x, y) \in E^2$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz peut s'écrire $\boxed{\langle x, y\rangle^2 \leq \|x\|^2.\|y\|^2}$ mais aussi

$$\boxed{|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|}.$$

On en déduit en particulier (mais c'est une inégalité plus faible) que $\langle x, y\rangle \leq \|x\|.\|y\|$.

Proposition I.3.12. *Soit $(E, \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien. Soit x et y deux vecteurs de E.*

(1) ✌ *L'égalité*

$$\|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 \pm 2\langle x, y\rangle$$

s'appelle formule d'Al-Kashi. On en déduit une identité de polarisation :

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)},$$

qui permet de retrouver le produit scalaire à partir de la norme euclidienne. De la même manière, on a aussi :

$$\boxed{\langle x, y\rangle = \frac{-1}{2}\left(\|x-y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)} \quad \textit{et} \quad \boxed{\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)}.$$

(2) Soient x et y dans E. On a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ (cas d'égalité de l'inégalité triangulaire) si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens ($y = 0_E$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = \lambda y$).

(3) De l'inégalité triangulaire on déduit que, pour tous x et y dans E :

$$\Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x - y\| \qquad \textit{(inégalité triangulaire inversée).}$$

Exemple I.3.13. (1) Dans $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire canonique

$$\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}.$$

(2) Dans $\mathscr{C}^0([a;b], \mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\int_a^b (f(t)+g(t))^2\,dt} \leq \sqrt{\int_a^b f(t)^2\,dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2\,dt}.$$

(3) Dans $\mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P|Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$:

$$\|P\| = \sqrt{\int_0^1 P(t)^2\,dt}.$$

Définition I.3.14. On appelle vecteur <u>normé</u> ou <u>unitaire</u> un vecteur de norme 1.

Exemple I.3.15. (1) Les vecteurs de la base canonique dans $\mathbb{R}^n$ usuel sont unitaires.

(2) La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(x)$ dans $\mathscr{C}^0([0;2\pi], \mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$ est unitaire.

(3) Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$, montrer que 1 est un vecteur normé et que les autres vecteurs de la forme X^n ne le sont pas.

On pourra utiliser les valeurs remarquables de la fonction Γ obtenues dans le chapitre *Intégration.*

II – Orthogonalité

On considère un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

1) Vecteurs orthogonaux

Définition II.1.1. On dit que deux vecteurs x et y de E sont orthogonaux si $\langle x, y \rangle = 0$. On note alors $x \perp y$.

Exemple II.1.2. (1) Pour tout $x \in E$, $0_E \perp x$.

(2) Deux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^n$ usuel (c'est-à-dire muni du produit scalaire canonique) sont orthogonaux.

(3) Dans $\mathscr{C}^0([0;2\pi], \mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$, les fonctions sin et cos sont orthogonales.

(4) Deux vecteurs peuvent être orthogonaux relativement à un produit scalaire mais pas à un autre. Par exemple, notons $P(X) = 2X - 1$ et $Q(X) = 4X^2 - 4X + 1$ et considérons dans $\mathbb{R}_2[X]$ les produits scalaires $\langle .|. \rangle$ et $(.,.)$ définis par $\langle P|Q \rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$ et $(a_2X^2 + a_1X + a_0, b_2X^2 + b_1X + b_0) = a_2b_2 + a_1b_1 + a_0b_0$.

Proposition II.1.3. *Soit $x \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient y_1, y_2,..., y_n des vecteurs de E.*
Le vecteur x est orthogonal à tous les y_i si et seulement si x est orthogonal à toute combinaison linéaire des y_i.

Proposition II.1.4 (Pythagore)**.**

$$\forall (x, y) \in E^2,\ x \perp y \iff \|x \pm y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

2) Orthogonal d'une partie de E

Définition II.2.5. Soit A une partie de E (pas nécessairement un sous-espace vectoriel!).
On appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A :

$$A^\perp = \{y \in E \mid \forall x \in A,\ x \perp y\}.$$

Exemple II.2.6. (1) ✌ Dans la partie précédente (II.1.3), on a vu que

$$\boxed{\{y_1, \ldots, y_n\}^\perp = \big(\text{Vect}(y_1, \ldots, y_n)\big)^\perp}.$$

En particulier, pour montrer qu'un vecteur x est orthogonal à un sous-espace vectoriel F de E (c'est-à-dire $x \in F^\perp$), il suffit de montrer que x est orthogonal à tous les vecteurs d'une famille génératrice de F (d'une base par exemple).

(2) On a toujours $E^\perp = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^\perp = E$.

Proposition II.2.7. *Soit A une partie de E.*
$A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Exemple II.2.8. Soit E un espace euclidien. Soit u un vecteur non nul de E. Montrer que $\{u\}^\perp$ est un hyperplan de E.

Proposition II.2.9. *Soient A et B deux parties de E. Si $A \subset B$, alors $B^\perp \subset A^\perp$.*

Définition II.2.10. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $F \subset G^{\perp}$,
- $G \subset F^{\perp}$,
- $\forall x \in F,\ \forall y \in G,\ x \perp y$.

On dit alors que F et G sont orthogonaux (parfois on note $F \perp G$).

3) Familles orthonormées

Définition II.3.11.

(1) On appelle famille orthogonale toute famille non vide de vecteurs de E deux à deux orthogonaux.

(2) On appelle famille orthonormée toute famille orthogonale formée de vecteurs normés.

Exemple II.3.12. (1) On convient qu'une famille formée d'un seul vecteur est orthogonale.

(2) La base canonique de $\mathbb{R}^n$ usuel est orthonormée.

(3) La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel est orthonormée.

(4) Dans $\mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire canonique, la base canonique est orthonormée.

(5) Dans $\mathscr{C}^0([0;2\pi],\mathbb{R})$ muni de $(f|g) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)\,dt$, la famille $\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos\right)$ est orthonormée.

Proposition II.3.13 (Pythagore)**.**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. **Si** *une famille de vecteurs $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ est orthogonale,* **alors** $\left\| \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2$.

En général, la réciproque est fausse! *(observer* $\left(\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}\right)$ *dans $\mathbb{R}^2$ usuel)*

Proposition II.3.14. *(1) Toute famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.*

(2) Toute famille orthonormée est libre.

(3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille orthonormée de vecteurs de E. Soit $x \in E$.
S'il existe des scalaires x_1,..., x_n tels que $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, alors :

$$\forall i \in [\![1;n]\!],\ x_i = \langle x, e_i \rangle.$$

Définition II.3.15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que E est de dimension n.
Toute famille orthonormée à n éléments est une base de E, appelée base orthonormée de E.

Remarque. ✌ Dans une base orthonormée, les coordonnées s'expriment facilement (par un produit scalaire) et ne nécessitent pas de résoudre un système d'équations ou d'inverser une matrice de passage. De plus, les calculs de produits scalaires et de normes sont immédiats, comme le montre le résultat suivant.

Théorème II.16. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que E est de dimension n. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une* **base orthonormée** *de E.*

(1) Pour tout $x \in E$, $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

(2) Soient x et y dans E. Notons $x_i = \langle x, e_i \rangle$ et $y_i = \langle y, e_i \rangle$ les coordonnées respectives de x et y dans $\mathscr{B}$ (obtenues grâce au point précédent!). Alors :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

(3) Soient x et y dans E. Notons X et Y les matrices-colonnes de coordonnées dans $\mathscr{B}$ de x et y. Alors :

$$\langle x, y \rangle = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{X^T X}.$$

Dans les expressions ci-dessus, on identifie une matrice 1×1 et un réel.

4) Existence de bases orthonormées

Théorème II.17. *Soit E un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.*
Il existe une base orthonormée de E.

Corollaire II.4.18. *Si E est un espace préhilbertien, tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie peut être muni d'une base orthonormée.*

Théorème II.19 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit φ une forme linéaire sur un espace* **euclidien** *E, c'est-à-dire une application linéaire définie sur E et à valeurs dans $\mathbb{R}$.*
Il existe un unique vecteur u de E tel que :

$$\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle u, x \rangle.$$

Remarque. ✌ Soit E un espace euclidien. Soit H un hyperplan de E.
On rappelle qu'il existe une forme linéaire non nulle φ sur E telle que $H = \mathrm{Ker}(\varphi)$. D'après le théorème de Riesz, il existe un vecteur u non nul de E tel que $\varphi : x \mapsto \langle u, x \rangle$. Il n'y a pas unicité de φ donc l'unicité de u importe peu ici.
Ainsi :

$$H = \mathrm{Ker}(\varphi) = \{x \in E \mid \varphi(x) = 0\} = \{x \in E \mid \langle u, x \rangle = 0\} = \{x \in E \mid x \perp u\} = \{u\}^{\perp} = \mathrm{Vect}(u)^{\perp}.$$

Dans la dernière partie du cours, on dira qu'un tel vecteur u est un *vecteur normal à H*.

III – Projection orthogonale sur F

On considère un espace préhilbertien $(E, \langle .,. \rangle)$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

1) Supplémentaire orthogonal et projection orthogonale

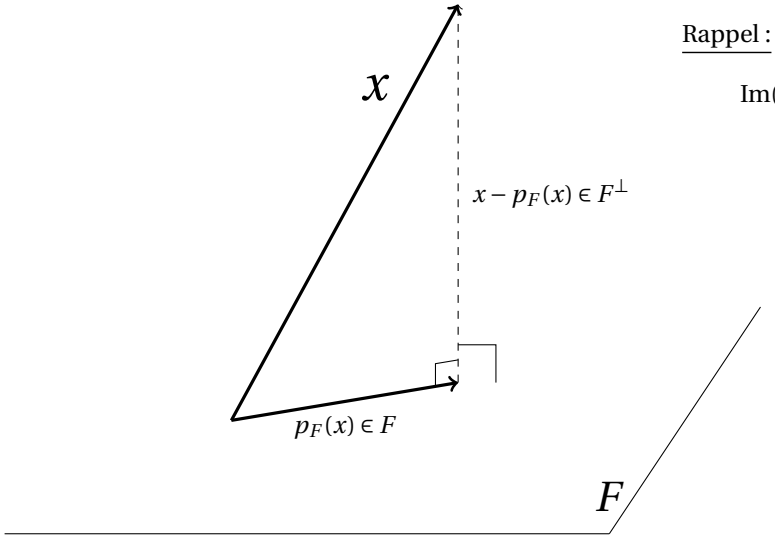
Définition - Théorème III.1.1 (Unicité du supplémentaire orthogonal)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = F \oplus G$ et F et G sont orthogonaux (autrement dit, F et G sont supplémentaires dans E et orthogonaux).

(1) Alors $G = F^\perp$. Le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est alors appelé **le** supplémentaire orthogonal de F.

(2) Supposons que $E = F \oplus F^\perp$.

(a) La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée projection (ou projecteur) orthogonale sur F et est notée p_F.

(b) Soit $x \in E$. Il existe un unique vecteur de F, noté $p_F(x)$, tel que $(x - p_F(x)) \in F^\perp$.
$p_F(x)$ est appelé projeté orthogonal de x sur F.



Rappel : comme pour toute projection, on rappelle que

$$\mathrm{Im}(p_F) = \mathrm{Ker}(p_F - \mathrm{Id}_E) = \{x \in E \mid p_F(x) = x\}$$

$$\text{et } \mathrm{Ker}(p_F) = \{x - p_F(x),\ x \in E\}.$$

Remarque. (1) On vient de démontrer que si un endomorphisme p de E vérifie $p \circ p = p$ et $\mathrm{Ker}(p) \perp \mathrm{Im}(p)$, alors p est **la** projection orthogonale sur $\mathrm{Im}(p)$. Ceci permet de reconnaître rapidement une projection orthogonale (donnée par son expression analytique, sa matrice,...).

(2) De la même manière, si s est une symétrie et si $F = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ est orthogonal à $G = \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, alors $G = F^\perp$.
Cette symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$ est alors appelée **la** *symétrie orthogonale par rapport à* F.
On a $s = 2p_F - \mathrm{Id}_E$

(3) On vient de montrer l'unicité du supplémentaire orthogonal de F mais son existence n'est pas garantie dans un espace préhilbertien quelconque (on n'a pas toujours $E = F \oplus F^\perp$ donc pas toujours l'existence d'une projection orthogonale sur F !). Dans le cas où F est de dimension finie, on a le résultat fondamental suivant :

Proposition III.1.2 (Condition suffisante d'existence du supplémentaire orthogonal)**.**
Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est **de dimension finie** *(ceci est toujours le cas si E est euclidien).*

(1) F et $F^\perp$ sont supplémentaires dans E.

On rappelle que $F^\perp$ est alors le supplémentaire orthogonal de F.

(2) On rappelle qu'on peut alors définir p_F la projection orthogonale sur F.
Si $\dim(F) \geq 1$ *et si* $(e_1, \dots, e_n)$ *est une* **base orthonormée** *de F, alors* $p_F(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle e_i$.

Remarque. On a en particulier montré que, pour tout sous-espace vectoriel F de E, $F \cap F^\perp = \{0_E\}$.
En effet, la dimension finie de F n'intervient pas dans la démonstration de cette partie du théorème.

Méthode. Pour déterminer le projeté orthogonal d'un vecteur x de E sur un sous-espace de dimension finie F, on a deux possibilités :

(1) on peut chercher l'unique vecteur $p_F(x)$ de F tel que $x - p_F(x)$ soit dans $F^\perp$, c'est-à-dire orthogonal à tous les vecteurs d'une base de F (pas forcément orthonormée cette fois !). Ces conditions conduisent à un système d'équations qui possède une et une seule solution ;

(2) utiliser le résultat précédent si on connaît une base orthonormée de F, base qui pourra bientôt être calculée par l'algorithme de Gram-Schmidt.

Exercice III.1.3. (1) Notons $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Notons $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$. Notons $x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Déterminer le projeté orthogonal de x sur F noté $p_F(x)$.

(2) Notons $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

Corollaire III.1.4. *On suppose que E est un espace* **euclidien** *de dimension $n \geq 1$.*
Toute famille orthonormée de vecteurs de E peut être complétée en une base orthonormée de E.

Remarque.

Dans la démonstration, il a été prouvé que si $\mathscr{B}_1$ est une base orthonormée de F et $\mathscr{B}_2$ une base orthonormée de $F^\perp$, alors la famille obtenue en concaténant $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ (c'est-à-dire en réunissant les vecteurs de ces familles) est une base orthonormée de E.

Proposition III.1.5. *Soit F un sous-espace vectoriel de E.*

(1) On a toujours l'inclusion $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$.

(2) Si F est **de dimension finie** *(en particulier si E est euclidien), alors $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.*

(3) Si E est **euclidien**, $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

2) Un contre-exemple si F n'est pas de dimension finie

Exercice III.2.6. Notons $E = \mathbb{R}[X]$ muni de son produit scalaire canonique : $\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k, \sum_{k=0}^{+\infty} b_k X^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k b_k$, la somme étant en fait finie puisque les coefficients d'un polynôme sont nuls à partir d'un certain rang.

Notons $F = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

(1) Montrer que $F^\perp = \{0_E\}$. On pourra utiliser les polynômes $X-1$, $X^2 - X$, ...

(2) En déduire que $E \neq F + F^\perp$ et $\left(F^\perp\right)^\perp \neq F$. Il est dans ce cas impossible de définir la projection orthgonale sur F!

Autre théorème faux en dimension infinie (Riesz) : il n'existe aucun vecteur $Q \in E$ tel que la forme linéaire $\varphi : P \mapsto P(1)$ puisse s'écrire $\varphi : P \mapsto (P, Q)$. Pourquoi?

3) Distance à un sous-espace

Définition III.3.7. Soient x et y deux vecteurs de E.
On appelle distance entre x et y et on note $d(x,y)$ le réel $\|y - x\|$.

Définition - Théorème III.3.8. Soit F un sous-espace vectoriel de E. Soit $x \in E$. On appelle distance de x à F le réel

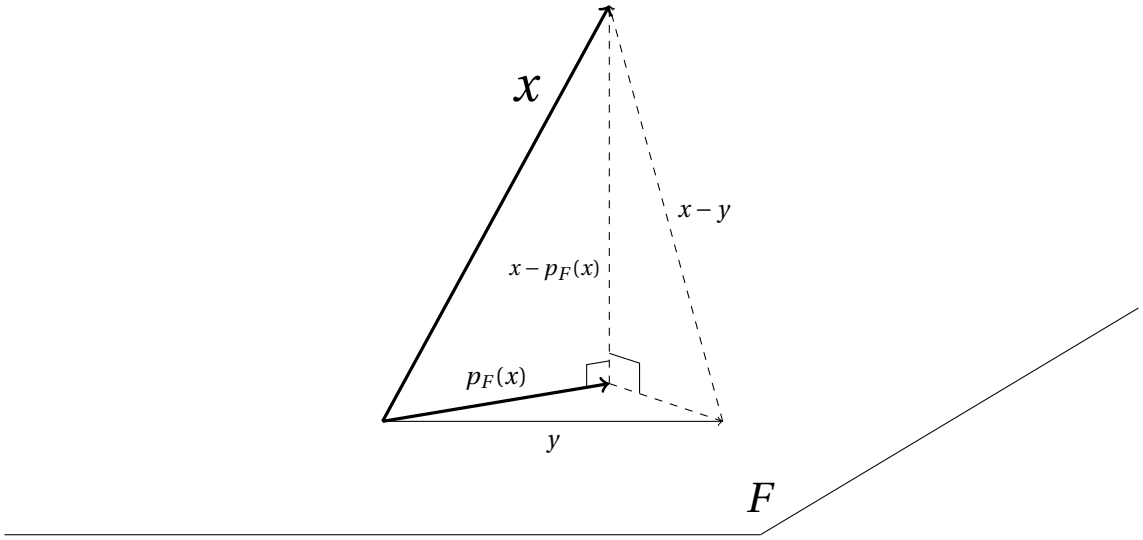
$$d(x,F) = \inf\left\{d(x,y),\ y \in F\right\} = \inf\left\{\|x-y\|,\ y \in F\right\}.$$

Proposition III.3.9. *Soit F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est* **de dimension finie**. *Soit $x \in E$.*

(1) Pour tout $y \in F$, $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - y\|$ avec égalité si et seulement si $y = p_F(x)$.

(2) On a alors $d(x,F) = \|x - p_F(x)\| = \min\left\{\|x-y\|,\ y \in F\right\}$.

(3) $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2$. En particulier, si $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ est une base orthonormée de F, alors $d(x,F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle^2$.



Exemple III.3.10. (1) Notons $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Notons $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right)$ et $x = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

Calculer $d(x,F)$.

(2) Justifier l'existence et calculer $\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^3} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2\, dt$.

4) Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ une base de E. On sait qu'il existe des bases orthonormées de E.
Construisons une base orthonormée $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que : pour tout $q \in [\![1; n]\!]$, $\text{Vect}(e_1, \dots, e_q) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_q)$.
Dans ce cas, la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est triangulaire supérieure.

Proposition III.4.11. *Pour orthonormaliser une base $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E par l'algorithme de Gram-Schmidt, on définit :*

$$\boxed{e_1 = \frac{1}{\|u_1\|} u_1} \text{ et : } \quad \forall q \in [\![1; n-1]\!],\ e_{q+1} = \frac{u_{q+1} - p_{F_q}(u_{q+1})}{\|u_{q+1} - p_{F_q}(u_{q+1})\|} \quad \text{en notant } F_q = \text{Vect}(e_1, \dots, e_q).$$

Autrement dit : $\forall q \in [\![1; n-1]\!]$, $\boxed{e_{q+1} = \dfrac{u_{q+1} - \sum_{k=1}^{q} \langle u_{q+1}, e_k \rangle e_k}{\sqrt{\|u_{q+1}\|^2 - \sum_{k=1}^{q} \langle u_{q+1}, e_k \rangle^2}}}$.

On remarque que les vecteurs e_q doivent être calculés de proche en proche, le vecteur e_{q+1} étant exprimé en fonction de e_1,..., e_q.

Exemple III.4.12. (1) On considère $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. On note $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Construire une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$ en utilisant l'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

(2) On considère $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
Déterminer une base orthonormée de E.

Exercice III.4.13.

(1) Notons $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Notons $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Notons $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Déterminer le projeté orthogonal de x sur F noté $p_F(x)$.

(2) Notons $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\,dt$.
Déterminer le projeté orthogonal de X^2 sur $\mathbb{R}_1[X]$.

IV – Hyperplans d'un espace euclidien

On considère un espace **euclidien** $(E, \langle .,. \rangle)$ de dimension $n \geq 1$. On note $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

Définition - Théorème IV.0.1. Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur de E.

On note $\mathscr{B}$ une base **orthonormée** de E et on suppose que la matrice de coordonnées de u dans $\mathscr{B}$ est $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

On dit que u est un vecteur normal à H s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

(1) $u \neq 0_E$ et $u \in H^\perp$;

(2) $H^\perp = \text{Vect}(u)$;

(3) $H = \{u\}^\perp$;

(4) H est le noyau de la forme linéaire $x \mapsto \langle u, x \rangle$;

(5) $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ est une équation de H dans la base orthonormée $\mathscr{B}$.

On connaissait déjà cette forme générale d'une équation d'hyperplan dans une base de E. Si la base est orthonormée, on peut désormais donner une interprétation *géométrique* des coefficients de cette équation.

Proposition IV.0.2. *Soit H un hyperplan d'un espace euclidien E. Soit u un vecteur normal à H.*
Si on note p_H la projection orthogonale sur H, on a :

$$\forall x \in E,\ p_H(x) = x - \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u,$$

$$\forall x \in E,\ d(x, H) = \frac{|\langle x, u \rangle|}{\|u\|}.$$

Exercice IV.0.3. Notons $E = \mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne usuelle. Notons $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
Vérifier que F est un hyperplan de E et donner une équation de F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Calculer $d(x, F)$.

Exercice IV.0.4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient a_0, ..., a_n des réels deux à deux distincts. On pose :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2, \langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k).$$

(1) Montrer qu'il s'agit d'un produit scalaire.

(2) Donner une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$ pour ce produit scalaire.

(3) On note $F = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$.

(a) Justifier rapidement que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$, calculer sa dimension ainsi que son orthogonal.

(b) Calculer la distance de X^n à F.