Filtrage

D. Charrier

PSI 2022-2023, Lycée Pierre-Gilles de Gennes

August 30, 2022

Rappels sur les fonctions sinusoïdales

Un signal sinusoïdal s'écrit:

$$e(t) = e_m \cos(\omega t + \varphi) = e_m \cos(2\pi f t + \varphi)$$

- e_m est l'amplitude du signal,
- ω est sa pulsation, f sa fréquence et $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ sa période temporelle,
- φ est sa phase.

Le déphasage entre deux signaux de même pulsation ω est lié au temps de retard entre les deux signaux par la relation:

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \omega(t_1 - t_2)$$

Signal complexe

Le signal complexe $\underline{s}(t)$ associé à $s(t)$ s'obtient en remplaçant cos(...) par $\mathrm{e}^{j\cdots}$. Ainsi, on peut écrire:

$$\underline{e}(t) = e_m \mathrm{e}^{j(\omega t+\varphi)} = \underline{e}_m \mathrm{e}^{j\omega t}$$

avec $\underline{e}_m = e_m \mathrm{e}^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe** du signal de tel sorte que:

$$e_m = |\underline{e}_m| \text{ et } \varphi = \arg(\underline{e}_m)$$

L'intérêt d'introduire les complexes est de remplacer les opérations de dérivation et d'intégration par des opérations simples :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{s}}{\mathrm{d}t}(t) = j\omega \underline{s}(t) \text{ et } \int \mathrm{d}t \underline{s}(t) = \frac{\underline{s}(t)}{j\omega}$$

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne d'un signal périodique de période T vaut:

$$\boxed{< e(t) >= \frac{1}{T}\int_{(T)} e(t)\mathrm{d}t}$$

On rappelle que:

$$< \cos(\omega t + \varphi) >= 0 \text{ et } < \cos^2(\omega t + \varphi) >= \frac{1}{2}$$

La valeur efficace d'un signal vaut:

$$\boxed{e_{\mathrm{eff}} = \sqrt{< e^2(t) >} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_{(T)} e^2(t)\mathrm{d}t}}$$

On en déduit que pour un signal sinusoïdal:

$$\boxed{e_{\mathrm{eff}} = \frac{e_m}{\sqrt{2}}}$$

Décomposition de Fourier

Définition

Toute fonction périodique de fréquence f peut se décomposer en une somme de sinusoïdes appelée **série de Fourier**:

$$e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} C_n \cos(2\pi nft + \varphi_n)$$

où:

- C_0 est la composante continue du signal ("offset"). Elle représente la valeur moyenne du signal,
- l'harmonique $n = 1$ est appelée **fondamentale**.

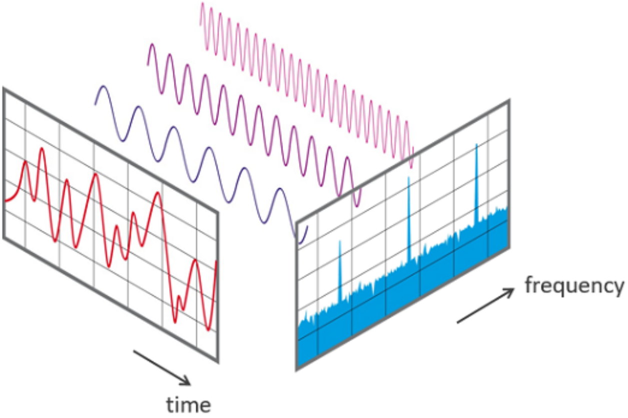
Théorème de Parceval

La valeur efficace du signal et l'amplitude des harmoniques vérifie le **théorème de Parseval**:

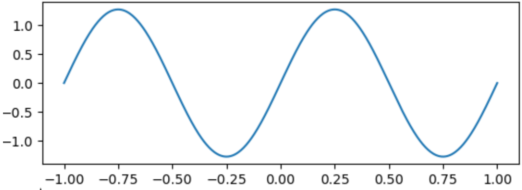
$$e_{\mathrm{eff}}^2 = C_0^2 + \sum_n \frac{C_n^2}{2}$$

Spectre: définition

Le spectre d'un signal est la représentation de la valeur absolue des coefficients $|C_n|$ en fonction du rang n ou de la fréquence f.

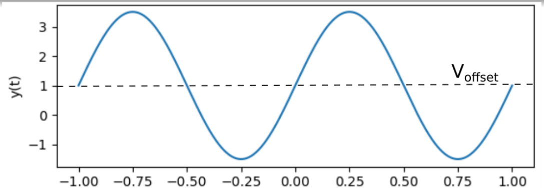


Exemple 1: Signal purement sinusoïdal $f = 1$Hz



$$e(t) = 2,5\cos(2\pi ft)$$

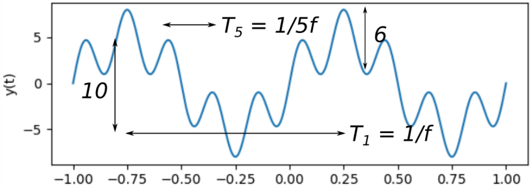
Exemple 2: Signal sinusoïdal à valeur moyenne non nulle



$$e(t) = 1 + 2,5\cos(2\pi f t)$$

Une valeur moyenne est représentée par une barre à la fréquence nulle.

Exemple 3: Signal contenant deux harmoniques



$$e(t) = 5\cos(2\pi ft)$$

$$+3\cos(2\pi 5ft)$$

Exemple 4: Signal créneau impair

La décomposition de Fourier d'un signal créneau impair s'écrit (formule hors-programme):

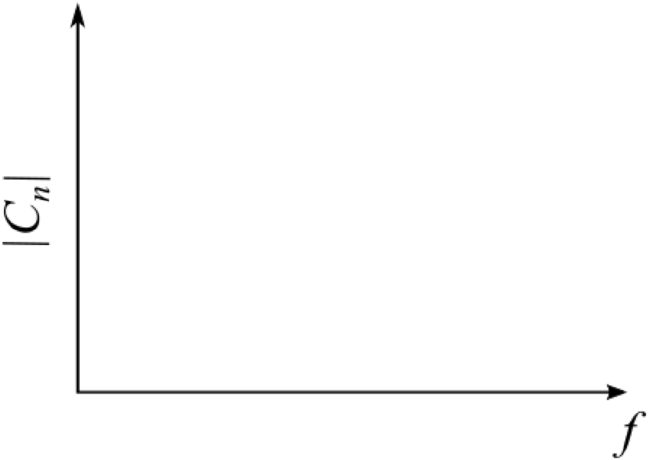
$$e(t) = V_{\text{offset}} + \frac{4E}{\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2k+1}\sin((2k+1)2\pi ft)$$

- Toutes les harmoniques de rang pair sont d'amplitude nulle.
- Pour n impair, les coefficients de Fourier sont égaux à:

$$C_n = \frac{4E}{\pi n}$$

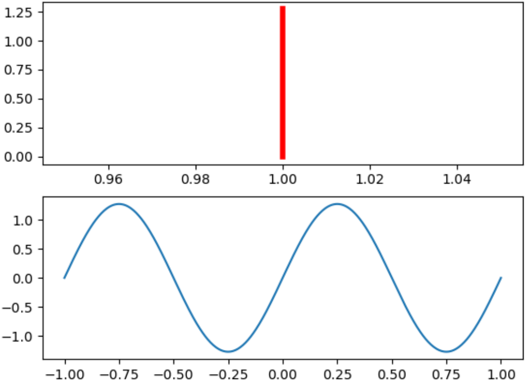
- Les déphasages sont tous égaux à $-\frac{\pi}{2}$.

Le spectre d'un signal carré ressemblera à:



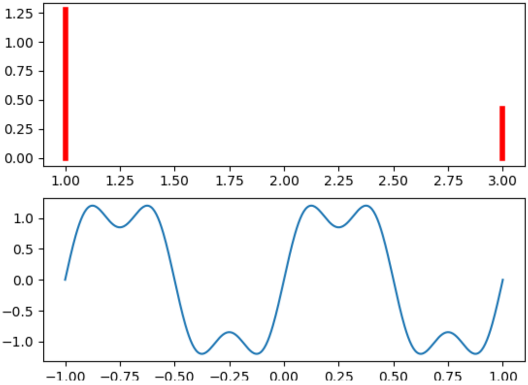
On peut aussi essayer de "reconstruire" la décomposition de Fourier en ajoutant petit à petit les harmoniques:

$$e(t) = \frac{4}{\pi}\cos(2\pi f t)$$



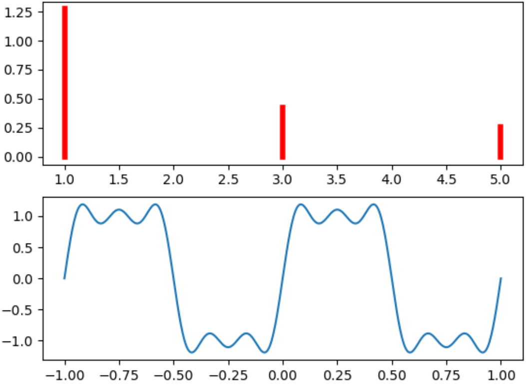
On peut aussi essayer de "reconstruire" le signal créneau en ajoutant petit à petit les harmoniques:

$$e(t) = \frac{4}{\pi}(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(6\pi ft))$$



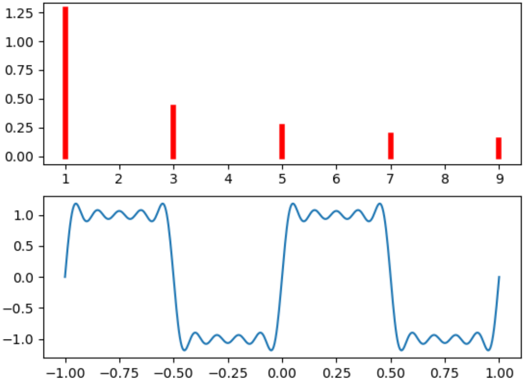
On peut aussi essayer de "reconstruire" le signal créneau en ajoutant petit à petit les harmoniques:

$$e(t) = \frac{4}{\pi}(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(6\pi ft) + \frac{1}{5}\sin(10\pi ft))$$



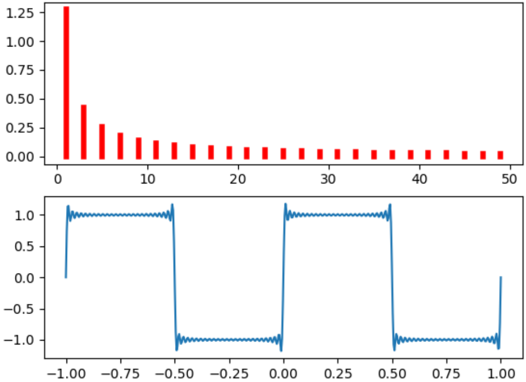
On peut aussi essayer de "reconstruire" le signal créneau en ajoutant petit à petit les harmoniques:

$$e(t) = \frac{4}{\pi}(\sin(2\pi ft) + \frac{1}{3}\sin(6\pi ft) + \frac{1}{5}\sin(10\pi ft) + \frac{1}{7}\sin(14\pi ft) + \frac{1}{9}\sin(18\pi ft$$



On peut aussi essayer de "reconstruire" le signal créneau en ajoutant petit à petit les harmoniques:

$$e(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{50}\frac{1}{2n+1}\sin(2\pi nft)$$



Exemple 4: Signal triangulaire impair

Sa décomposition s'écrit (formule hors-programme):

$$e(t) = V_{\text{offset}} - \frac{8E}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \sin((2k+1)2\pi f t)$$

- Toutes les harmoniques de rang pair sont d'amplitude nulle.
- Pour n impair, les coefficients de Fourier sont égaux à:

$$C_n = \frac{8E}{\pi n^2}$$

- Les déphasages sont tous égaux à $-\frac{\pi}{2}$.

Comparaison des spectres des signaux carrés et triangles

Plus un signal admet des variations brusques, plus les harmoniques de rang élevée ont un poids important dans le spectre.

Caractéristiques d'un filtre

- Fonction de transfert:

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\underline{s}_m}{\underline{e}_m}$$

- Gain:

$$G = |\underline{H}| = \frac{s_m}{e_m}$$

- Gain en décibel:

$$G_{\mathrm{dB}} = 20 \log G \iff G = 10^{\frac{G_{\mathrm{dB}}}{20}}$$

- Déphasage introduit par le filtre:

$$\varphi = \arg(\underline{H})$$

Bande passante

La bande passante du filtre définit l'ensemble des fréquences ou des pulsations telles que:

$$G(f) \geq \frac{G_{\mathrm{max}}}{\sqrt{2}} \iff G_{\mathrm{dB}}(f) \geq G_{\mathrm{dB,max}} - 3\mathrm{dB}$$

Gabarit

Le gabarit est la représentation graphique des zones autorisées ou interdites pour le gain du filtre en fonction de la pulsation (ou la fréquence).

Filtres à connaître: passe-bas et passe-haut du 1er ordre, passe-bande du second ordre, passe-bas du 2nd ordre.

Action d'un filtre sur un signal sinusoïdal

Dans ce cas, seuls changent **l'amplitude** et **la phase** du signal:

$$s_m = G(f)e_m = 10^{\frac{G_{\mathrm{dB}}(f)}{20}}$$

$$\varphi_s = \varphi(f) + \varphi_e$$

Le gain $G(f)$ et le déphasage $\varphi(f)$ sont calculés:

- soit à partir de la fonction de transfert,
- soit en lisant un diagramme de Bode fourni.

Le signal de sortie s'écrit donc:

$$s(t) = G(f) e_m \cos(2\pi f t + \varphi_e + \varphi(f))$$

On distingue trois cas:

- $G(f) < 1 \Leftrightarrow G_{\mathrm{dB}}(f) < 0$: signal atténué,
- $G(f) > 1 \Leftrightarrow G_{\mathrm{dB}}(f) > 0$: signal amplifié
- $G(f) = 1 \Leftrightarrow G_{\mathrm{dB}}(f) = 0$: amplitude du signal inchangée.

Approche par le calcul

Exemple: soit un signal sinusoïdal de fréquence $f = 0.3Hz$, d'amplitude $E = 2\mathrm{V}$ et de phase nulle:

$$e(t) = E\cos(2\pi ft)$$

On met ce signal en entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre, de gain statique $H_0 = 1$ et de fréquence de coupure $f_0 = 1\mathrm{Hz}$. Comment s'écrit le signal de sortie?

Filtrage de signaux sinusoïdaux de fréquence $f = \frac{f_0}{10}$, $f = f_0$ et $f = 4f_0$ par un passe-bas de fréquence de coupure f_0.

Action d'un filtre sur un signal périodique quelconque

Le système étant linéaire, on peut utiliser le **théorème de superposition**.

1. Si le signal d'entrée admet des harmoniques de fréquence $n \times f$, le signal de sortie admet aussi des harmoniques de fréquence $n \times f$.
2. Pour toutes les valeurs de n:
   - l'amplitude de l'harmonique est multipliée par $G(nf)$ (gain à la fréquence $n \times f$),
   - l'harmonique est déphasée de $\varphi(nf)$ (déphasage du filtre à la fréquence $n \times f$).

Approche par le calcul

Exemple: soit un signal carré de fréquence f. Sa décomposition de Fourier s'écrit:

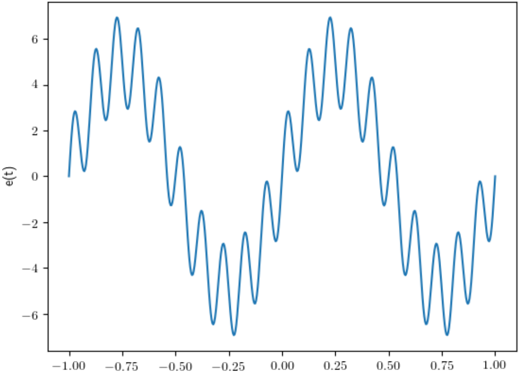
$$e(t) = \frac{4E}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2k+1} \sin((2k+1)2\pi f t)$$

On met ce signal en entrée d'un filtre passe-bas du premier ordre, de gain statique $H_0 = 1$ et de fréquence de coupure f_0. Comment s'écrit le signal de sortie?

Approche graphique

Soit le signal d'entrée:

$$e(t) = 5\cos(2\pi t) + 2\cos(2\pi 10 t)$$

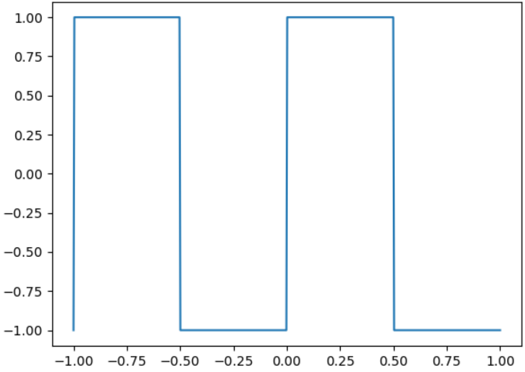


On fait passer ce signal dans un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_0 = 2$ Hz.

On fait passer le même signal dans un filtre passe-haut du premier ordre de fréquence de coupure $f_0 = 8$ Hz.

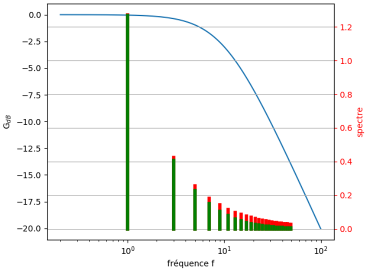
Filtrage passe-bas du signal carré

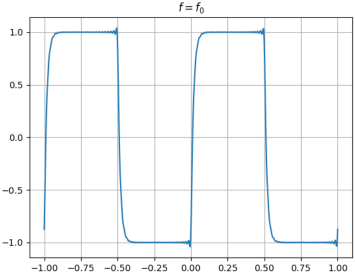
On peut effectuer la même chose avec un signal carré de fréquence $f = 1\text{Hz}$ traversant des filtres passe-bas de fréquence de coupure f_0 différentes.



$f = 1$ Hz, $f_0 = 10$ Hz

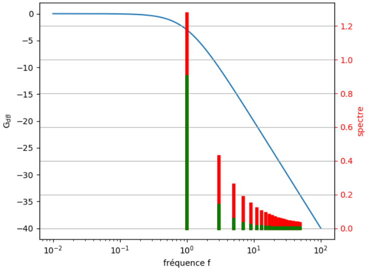
Si $f << f_0$, les harmoniques sont très peu coupées et le signal est très peu déformé.

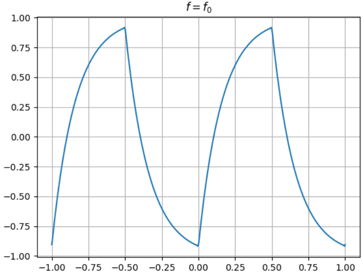




$f = 1$ Hz, $f_0 = 1$ Hz

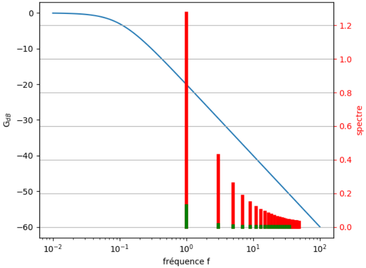
Si $f \approx f_0$, le signal est déformé. Les variations brusques sont atténuées.

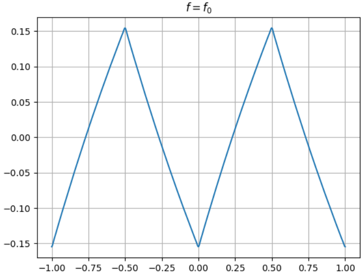




$f = 1$ Hz, $f_0 = 0.1$ Hz

Si $f >> f_0$, le signal est très atténué et le signal créneau devient triangulaire (caractère intégrateur à haute fréquence).

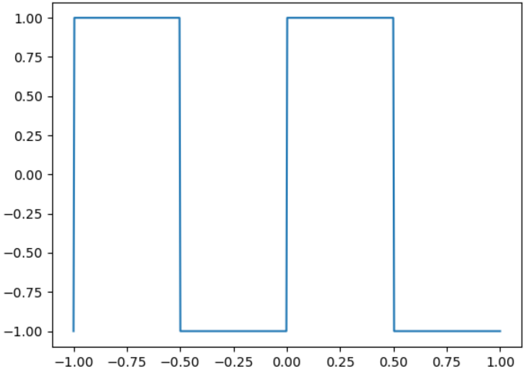




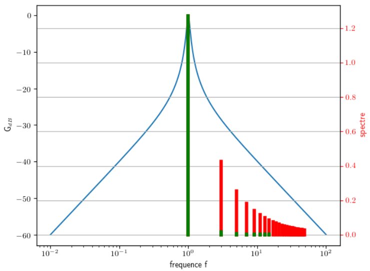
Si le signal d'entrée possède une valeur moyenne non nulle, seule cette valeur n'est pas atténuée. On dit que le filtre joue le rôle d'un **moyenneur**.

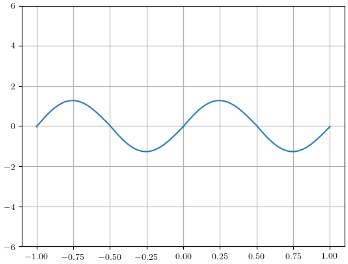
Filtrage passe-bande du signal carré

On peut sélectionner les harmoniques d'un signal carré de fréquence $f = 1$Hz avec un filtre passe-bande très sélectif.

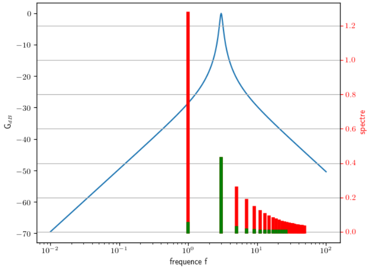


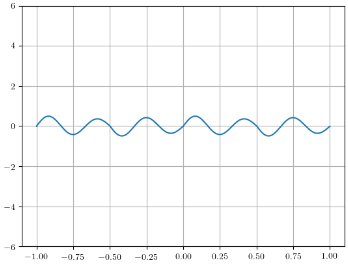
Sélection de la fondamentale ($f_0 = f$ et Q élevé).





Sélection de l'harmonique de rang 3 ($f_0 = 3f$ et Q élevé).





Sélection de l'harmonique de rang 5 ($f_0 = 5f$ et Q élevé).