

Correction TD n°1

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

- ★ Exercice de niveau CCP
- Exercice niveau Centrale/Mines-Ponts
- ◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

1. Appareils de mesure

1.1 Quelques contrariétés expérimentales★

- En absence de voltmètre, un pont diviseur de tension donne $u_{AB} = u_{BC} = 120V$ et on a bien la loi d'additivité des tensions : $u_{AB} + u_{BC} = U$. Lorsqu'on branche le voltmètre, il faut prendre en compte sa résistance interne et effectuer un calcul de résistance équivalente. On trouve alors $u_{AB} = u_{BC} = 70V$. Par contre, on a toujours $u_{AC} = U = 240V$. La loi d'additivité des tensions n'est plus vérifiée ! Cela vient du fait que la position du voltmètre modifie les valeurs des courants dans le circuit. On retiendra que :

L'influence d'un voltmètre (ou d'un oscilloscope) est négligeable lorsque les résistances du circuit sont très faibles devant la résistance interne du voltmètre (ou de l'oscilloscope).

- En absence d'oscilloscope, on a $u_{AB} = 4V$. Lorsqu'on connecte l'oscilloscope au circuit, les deux bornes de la résistance située en bas du circuit sont connectées à la masse. La tension aux bornes de la résistance vaut 0V : elle est court-circuitée (équivalente à un fil) ! La tension u_{AB} vaut alors 6V (pont diviseur avec deux résistances). On retiendra que :

Dans un circuit électrique, toutes les masses doivent être branchées en un même point.

1.2 Pont de Wheatstone

Notons u_1 et u_4 les tensions aux bornes de la résistance R_1 et de la résistance R (orientées de la droite vers la gauche). Etant donné que le courant traversant le voltmètre est nul (résistance interne très grande), on a :

$$u_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} v, \quad u_4 = \frac{R}{R + R_3} v$$

Par ailleurs, lorsque le pont est équilibré, on a $u_1 = u_4$. On en déduit :

$$R = \frac{R_1 R_3}{R_2}$$

Pour utiliser un pont de Wheatstone et déterminer la valeur de R , on fera donc varier la résistance R_3 de façon à annuler la tension aux bornes du voltmètre. On en déduit alors R en utilisant le résultat ci-dessus.

2. Régime transitoire

Résistance de fuite dans un condensateur réel

- En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Un pont diviseur de tension donne $v_\infty = \frac{R_f}{R + R_f} E$. Dans la limite où $R_f \gg R$, on a : $v_\infty \approx E$.

- Le condensateur se décharge dans sa résistance de fuite :

$$\frac{dv}{dt}(t) + \frac{v(t)}{R_f C} = 0$$

La solution s'écrit : $v(t) = v_\infty e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = R_f C$.

- On a :

$$v(t_1 = 100s) = 10V \Rightarrow e^{-\frac{t_1}{\tau}} = \frac{10}{15} \Rightarrow \tau = \frac{t_1}{\ln \frac{15}{10}} \approx 250s$$

On en déduit $R_f = 250M\Omega$. Par ailleurs, on cherche t_2 tel que $v(t_2) = 1V$.

On a donc :

$$1 = 15e^{-\frac{t_2}{\tau}} \Rightarrow t_2 = \tau \ln 15 = 680s$$

Décharge d'un condensateur dans un autre •

1. Pour le condensateur de gauche, l'armature du haut a une charge $+CU_0$, l'armature du bas a une charge $-CU_0$. Le condensateur de droite étant déchargé, ses deux armatures ont une charge nulle. A la fermeture de l'interrupteur, le condensateur chargé va se vider dans le condensateur déchargé.
2. Aux bornes d'un condensateur, la tension est continue. On a donc $u(t=0^+) = U_0$, $u'(t=0^+) = 0$. La loi des mailles donne :

$$u(t=0^+) = Ri(t=0^+) + u'(t=0^+) \Rightarrow \boxed{i(t=0^+) = \frac{U_0}{R}}$$

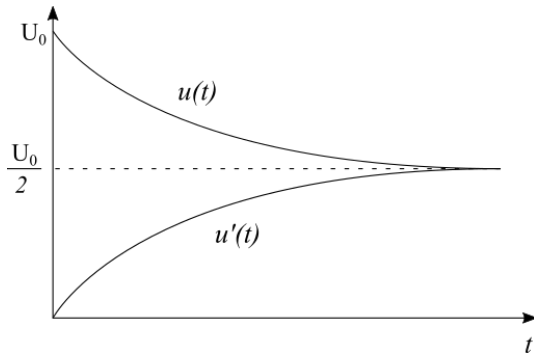
3. On remarque que $i(t) = C \frac{du'}{dt}(t) = -C \frac{du}{dt}(t)$. On en déduit que :

$$\boxed{u(t) + u'(t) = \text{cste} = U_0}.$$

La loi des mailles donne par ailleurs :

$$u(t) = Ri(t) + u'(t) \Rightarrow 2u(t) + RC \frac{du}{dt}(t) = U_0$$

4. La solution de l'équation précédente, en tenant compte des conditions initiales, s'écrit $u(t) = \frac{U_0}{2}(1 + e^{-\frac{2t}{RC}})$. On en déduit $u'(t) = \frac{U_0}{2}(1 - e^{-\frac{2t}{RC}})$.



Physiquement, on comprend ce qu'il se passe : les charges se déplacent du condensateur de gauche vers celui de droite jusqu'à équilibre des charges de part et d'autre du circuit.

5. L'énergie dissipée dans la résistance est égale à l'énergie initialement stockée dans le circuit moins l'énergie finale stockée dans le circuit. On rappelle la formule de l'énergie stockée dans un condensateur :

$$\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t)$$

Sachant qu'à $t = 0$, les tensions aux bornes des deux condensateurs valent U_0 et 0 et qu'à l'instant final, elle valent toutes les deux $\frac{U_0}{2}$, on a :

$$\mathcal{E}_{\text{diss}} = \frac{1}{2}Cu_0^2 - 2 \times \frac{1}{8}Cu_0^2 = \frac{1}{4}Cu_0^2$$

La moitié de l'énergie initiale a donc été dissipée par la résistance, l'autre moitié est stockée équitablement dans les condensateurs.

Circuit RLC parallèle •

1. La fonction de transfert du système s'écrit :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}_C}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{LC}}{\underline{Z}_{LC} + R} = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{LC}} = \frac{1}{1 + R(\underline{Y}_L + \underline{Y}_C)} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega}$$

En repassant en réel, on en déduit :

$$u_C(t) + \frac{R}{L} \int u_C(t) dt + RC \frac{du_C}{dt}(t) = e(t)$$

En dérivant une fois par rapport au temps et en divisant par RC , on obtient l'équation demandée, avec, par identification : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

On remarque que la pulsation propre est la même que celle d'un circuit RLC série, mais que le facteur Q est l'inverse de celui du RLC série. En effet, dans un circuit parallèle, plus R est grand, plus on se rapproche d'un oscillateur harmonique.

2. On calcule $Q = 1/2$ donc on est en régime critique. La solution est de la forme :

$$u_C(t) = (At + B)e^{-\omega_0 t} + U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

On trouve U_m et φ en passant en complexe et en utilisant un pont diviseur de tension :

$$U_m = \frac{E}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \text{ et } \varphi = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

Comme à $t = 0$, $u_C(t = 0) = 0$, la loi des mailles et des noeuds conduisent à :

$$i(t = 0) = \frac{e(0) - u_C(0)}{R} = \frac{E}{R} = i_C(t = 0) + i_L(t = 0) = C \frac{du_C}{dt}(t = 0)$$

En appliquant ces conditions initiales, on trouve $B = -U_m \cos \varphi$ et $A = \frac{E}{RC} - U_m(\omega_0 \cos \varphi + \omega \sin \varphi)$.

Résolution de problèmes : détermination d'un circuit à l'aide d'acquisitions ♦

Sur le portait de phase, on lit que $\dot{u}_C(t=0) \neq 0$. Ceci n'est pas possible pour le circuit série. En effet, l'énergie de la bobine étant nulle à l'instant initial, le courant traversant la bobine est nul à $t=0$. Dans le circuit série, le courant traversant la bobine traverse aussi le condensateur donc $i_C(t=0) = C \frac{du_C}{dt}(t=0) = 0$. Le circuit série est donc à rejeter et seul le circuit parallèle est à considérer.

On observe un régime pseudo-périodique. Pour déterminer L et C , il suffit d'évaluer la pulsation propre et le facteur de qualité du circuit : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$. En régime pseudo-périodique, on calcule ces deux grandeurs à partir de :

- la pseudo-période $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$
- le décrément logarithmique $\delta = \frac{\omega_0}{2Q}$.

Néanmoins, en présence d'un nombre important d'oscillations, on pourra utiliser le fait que $T_0 \approx T$ et que $Q = \text{"nombres d'oscillations visibles"}$. On en déduit

$$T \approx 5.10^{-4} \text{ s} \text{ et } Q \approx 12 \text{ soit } L = 0,2 \text{ mH} \text{ et } C = 40 \mu\text{F}.$$

Filtrage d'un signal sinusoïdal

Diagramme de Bode en gain

- On reconnaît le diagramme de Bode d'un filtre passe-bande. Pour déterminer son ordre, on peut tracer les asymptotes à basse fréquence et à haute fréquence. On trouve des pentes de +20dB/dec et de -20dB/dec. On a donc bien un filtre passe-bande du second ordre.
- On peut proposer un circuit RLC branché sur un GBF avec en entrée la tension aux bornes du GBF et en sortie la tension aux bornes de la résistance.
- La méthode classique consiste à mesurer la fréquence de résonance, ici $f_r = 1 \text{ kHz}$. Puis on mesure la bande passante à -3dB, ici $\Delta f \approx 100 \pm 50 \text{ Hz}$. Le facteur de qualité vaut alors :

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} \approx 10$$

Cette dernière formule a été vue en SUP. Elle n'est valable que pour le filtre passe-bande. Elle est à connaître.

- Pour un circuit RLC, la fréquence de résonance vaut :

$$f_r = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

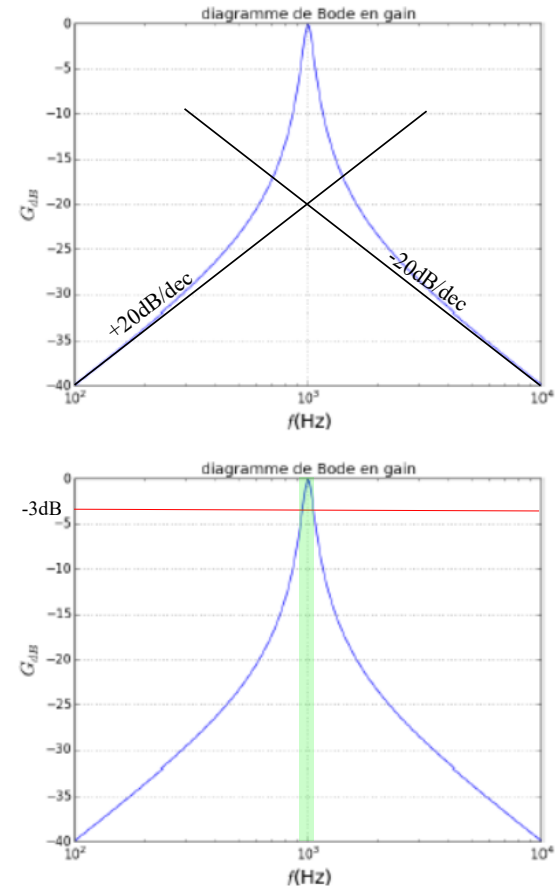


FIGURE 1. Haut : tracé des asymptotes. Bas : bande-passante

Cette expression est assez classique et se retrouve en déterminant la pulsation propre du circuit RLC. On en déduit :

$$L = \frac{1}{4\pi^2 f_r^2 C} = 25 \mu\text{H}$$

- De manière analogue, on peut montrer que :

$$\frac{f_r}{Q} = \frac{R}{2\pi L}$$

D'où :

$$R = \frac{2\pi L f_r}{Q} = 15\text{m}\Omega$$

Ceci n'est pas compatible avec un circuit RLC classique car le circuit contient au moins la résistance de sortie du GBF qui vaut 50Ω .

Filtre de Wien

1. Même réponses qu'à l'exercice précédent.
2. Même méthode que dans l'exercice précédent.
 - $G_{\max} = -9 \pm 1 \text{ dB}$,
 - pulsation de résonance $\omega_r = 7000 \pm 1000 \text{ s}^{-1}$,
 - bande passante à -3 dB $\Delta\omega = 18000 \pm 5000 \text{ Hz}$,
 - facteur de qualité :

$$Q = \frac{\omega_r}{\Delta\omega} = 0,39 \pm 0,07$$

Pour calculer l'incertitude sur Q , j'ai utilisé la formule de propagation des incertitudes pour les produits et les quotiens :

$$\frac{\Delta Q}{Q} = \sqrt{\left(\frac{\Delta\omega_r}{\omega_r}\right)^2 + \left(\frac{\Delta(\Delta\omega)}{\Delta\omega}\right)^2}$$

3. A fréquence nulle, le condensateur est équivalent à un circuit ouvert. Comme le premier condensateur ne laisse pas passer le courant, la deuxième résistance n'est pas alimentée en courant et elle est équivalente à un fil. La tension de sortie est donc nulle. A haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à un fil. La tension de sortie est nulle. Le filtre coupe les basses et les hautes fréquences : on a bien un filtre passe-bande.
4. Notons $\underline{Z}_s$ et $\underline{Z}_p$ les impédances correspondantes à l'association série et à l'association parallèle $R - C$. Le pont diviseur donne :

$$\begin{aligned} H &= \frac{\underline{Z}_p}{\underline{Z}_s + \underline{Z}_p} = \frac{1}{\underline{Z}_s \underline{Y}_p + 1} \\ &= \frac{1}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)\left(\frac{1}{R} + jC\omega\right) + 1} \\ &= \frac{1}{3 + \frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega} \\ &= \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{jRC\omega} + jRC\omega\right)} \end{aligned}$$

Il s'agit d'un filtre passe-bande :

- de gain à la résonance $A = \frac{1}{3}$,
- de facteur de qualité $Q = \frac{1}{3}$,
- de pulsation de résonance $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Le diagramme de Bode en gain présente une pente de +20dB/dec à basses fréquences et une pente de -20 dB/dec à hautes fréquences. Le gain à la résonance vaut $G_{\text{dB,max}} = 20\log \frac{1}{3} \approx -9,5\text{dB}$. On retrouve donc bien les résultats précédents.

3. Etude de signaux à plusieurs harmoniques

3.1 Signal modulé en amplitude ★

En utilisant la formule de trigonométrie :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

on obtient :

$$u(t) = U \cos(2\pi f_2 t) + \frac{U_m}{2} \cos(2\pi(f_1 + f_2)t) + \frac{U_m}{2} \cos(2\pi(f_1 - f_2)t)$$

On a donc un spectre contenant trois pics :

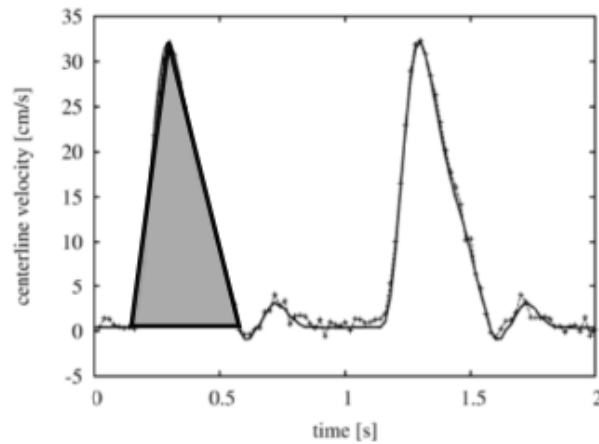
- un pic à la fréquence f_2 de hauteur U ,
- un pic à la fréquence $f_2 - f_1$ de hauteur $\frac{U_m}{2}$,
- un pic à la fréquence $f_2 + f_1$ de hauteur $\frac{U_m}{2}$,

Vitesse du sang dans une artère

1. La vitesse moyenne d'un signal vaut :

$$\langle e(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T e(t) dt \approx \frac{\mathcal{A}}{T}$$

où $\mathcal{A}$ désigne l'aire sous la courbe pour une durée d'une période.



En assimilant grossièrement la courbe à un triangle de base $t = 0,4\text{s}$ et de hauteur $h = 32\text{ cm/s}$, on en déduit : $\langle e(t) \rangle = \frac{0,4 \times 32}{2} = 6,4\text{ cm/s}$.

2. Le signal est périodique de période $T = 1\text{s}$. Il ne présente aucune parité particulière. A priori, il contiendra des harmoniques aux fréquences $f = 1\text{Hz}$, 2 Hz , 3 Hz ...
3. Elle est généralement de l'ordre de grandeur de l'amplitude de la fonction elle-même, soit $32/2 = 16$.

Filtre

On étudie un montage dont la fonction de transfert est :

$$\underline{H} = -\frac{1}{1 + 3jRC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2}$$

1. Montrer qu'on peut l'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{G_0}{1 + 2jm\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} G_0 = -1 \\ \frac{2m}{\omega_0} = 3RC_1 \\ \frac{2m}{\omega_0^2} = R^2C_1C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G_0 = -1 \\ \omega_0 = \frac{3}{RC_2} \\ m = 9\frac{C_1}{2C_2} \end{cases}$$

2. On doit avoir :

$$C_2 = \frac{9C_1}{\sqrt{2}}$$

On a $m < 1$ (m est le facteur d'amortissement ξ). Le régime est apériodique.

3. On a $R = \frac{3}{2\pi f_0 C_2}$. On doit donc prendre :

$$\frac{3}{2\pi \times 4\text{kHz} \times C_2} \leq R \leq \frac{3}{2\pi \times 4\text{kHz} \times C_2}$$

4. Ces diagrammes ont la même allure que les diagrammes de l'exercice 4.2.
5. Ce circuit est double intégrateur à haute fréquence car la fonction de transfert est équivalente à :

$$\underline{H} \sim -\frac{1}{R^2C_1C_2(j\omega)^2}$$

6. On envoie un signal de fréquence $f = 1,5\text{ kHz}$.

- (a) A $1,5\text{ kHz}$, le gain du filtre vaut $0,4$. Le déphasage vaut environ -100° . Le signal de sortie est sinusoïdal, de fréquence $1,5\text{ kHz}$, atténué et déphasé.
- (b) La valeur moyenne du signal n'est pas modifiée. La fondamentale sera multipliée par $0,4$. L'harmonique de rang 3 sera atténuée d'un facteur 20, l'harmonique de rang 5 sera atténuée d'un facteur 56. Le signal ressemblera à une suite de paraboloïdes (double intégration de constantes positives et négatives) de faibles amplitudes oscillant autour de la valeur moyenne.
- (c) Ce filtre présente un gain qui varie très peu pour des fréquences inférieures à f_0 tout en étant d'avantage filtrant qu'un filtre passe-bas du premier ordre à haute fréquence.