Correction DS n°1

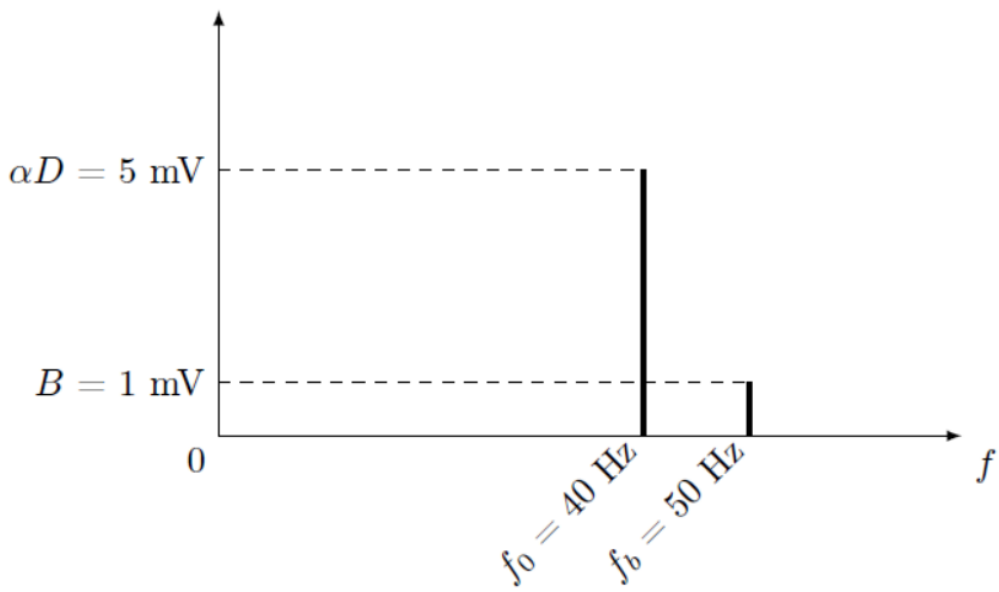
PSI 2021/2022

I Débimètre électromagnétique

1. $v(t)$ est la somme de deux signaux sinusoïdaux aux fréquences f_0 et f_b. Numériquement, l'amplitude de la composante à la fréquence f_0 de $v(t)$ vaut :

$$\alpha D = 0.01 \times 0.5 = 0.005\text{V} = 5\text{mV}$$

Le spectre en amplitude de $v(t) = \alpha D \cos(\omega_0 t) + B \cos(\omega_b t)$ est représenté ci-dessous :



2. On peut envisager d'éliminer la composante à la fréquence f_b (le bruit) par filtrage passe-bas de fréquence de coupure f_c telle que $f_0 < f_c < f_b$. Un tel filtre, s'il est efficace, conserve la composante à f_0 (inférieure à f_c) et atténue la composante à f_b (supérieure à f_c).

3. On a :

$$\begin{aligned} w(t) &= Kv(t)a(t) \\ w(t) &= K(\alpha D \cos(\omega_0 t) + B \cos(\omega_b t))A \cos(\omega_0 t) \\ &= K\alpha DA \cos^2(\omega_0 t) + KAB \cos(\omega_b t)A \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

En utilisant les formules de trigo fournies, on en déduit :

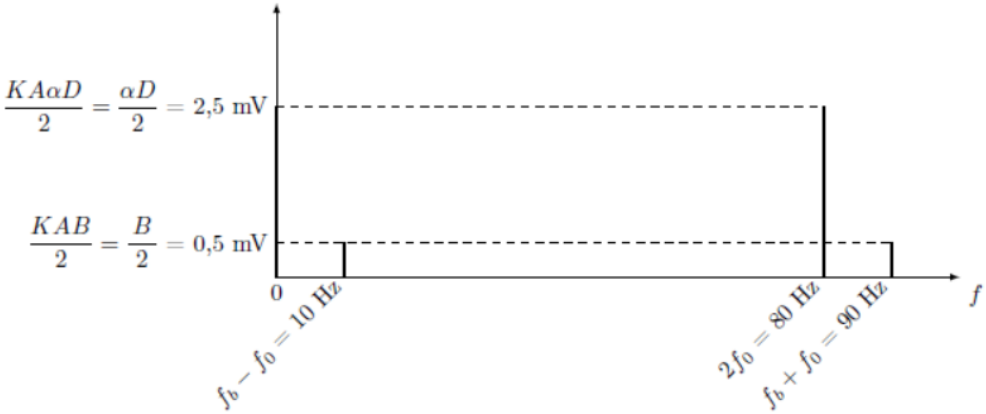
$$\begin{aligned} w(t) &= \frac{K\alpha DA}{2}(1+\cos(2\omega_0 t)) + \frac{KAB}{2}(\cos((\omega_b-\omega_0)t)+\cos((\omega_b+\omega_0)t)) \\ &= \frac{K\alpha DA}{2} + \frac{K\alpha DA}{2}\cos(2\omega_0 t) + \frac{KAB}{2}\cos((\omega_b-\omega_0)t) + \frac{KAB}{2}\cos((\omega_b+\omega_0)t) \end{aligned}$$

En rangeant les diverses composantes par ordre croissant de fréquences :

$$w(t) = \frac{K\alpha DA}{2} + \frac{KAB}{2}\cos((\omega_b-\omega_0)t) + \frac{K\alpha DA}{2}\cos(2\omega_0 t) + \frac{KAB}{2}\cos((\omega_b+\omega_0)t) \qquad (1)$$

Le signal $w(t)$ contient donc des composantes aux fréquences 0, $f_b - f_0 = 10$Hz, $2f_0 = 80$ Hz, et $f_b + f_0 = 90$ Hz. La moyenne temporelle $< w >$ de $s(t)$ correspond au premier terme de l'équation (1) (les autres termes sont des sinusoïdes de valeur moyenne nulle.

Le spectre en amplitude de $w(t)$ est donné ci-dessous :



4. L'expression du gain est :

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \frac{H_0}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_c^2}}} \\ &= \frac{H_0}{\sqrt{1 - 2\frac{\omega^2}{Q^2\omega_c^2} + \frac{\omega^4}{\omega_c^4} + 2\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+\frac{\omega^4}{\omega_c^4}}} \end{aligned}$$

H_0 correspond au gain statique. Lorsque ω tend vers 0, $G(\omega)$ tend vers H_0. D'après le diagramme de Bode de l'énoncé, le gain statique en décibels vaut environ 46 dB. Donc :

$$20\log(H_0) = 46 \Rightarrow H_0 = 10^{\frac{46}{20}} \approx 200$$

Pour déterminer la valeur de f_c, on peut déterminer l'expression théorique du gain pour $\omega = \omega_c$:

$$\begin{aligned} G(\omega=\omega_c) &= \frac{H_0}{\sqrt{2}} \\ \Rightarrow G_{dB}(\omega=\omega_c) &= 20\log H_0 - 3\text{dB} \approx 43\text{dB} \end{aligned}$$

On cherche ensuite sur le diagramme à quelle valeur de fréquence ce gain en décibel correspond. On trouve :

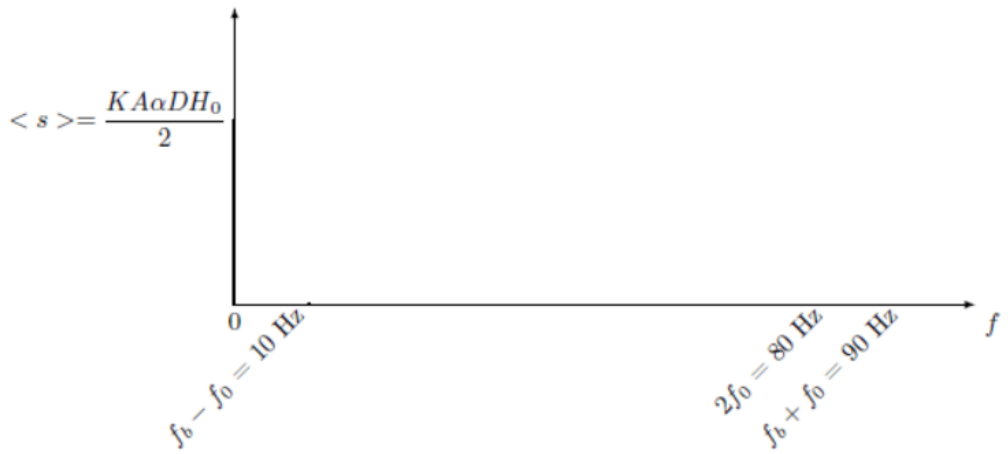
$$f_c \approx 2\text{Hz}$$

5. — Pour $\omega = 0$, $\underline{H} = H_0$, $\varphi = \arg(H_0) = 0$,

— Pour $\omega = \omega_c$, $\underline{H} = \frac{QH_0}{j}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,

— Pour $\omega >> \omega_c$, $\underline{H} \to \frac{H_0}{-\frac{\omega^2}{\omega_c^2}}$, $\varphi \to \pi$.

6. Le filtre utilisé est un filtre passe-bas de fréquence de coupure 2 Hz. Il va donc laisser passer (fortement amplifier en fait) toutes les fréquences inférieures à 2 Hz. Le gain chute à partir de cette valeur. Les fréquences supérieures à 2 Hz seront donc beaucoup moins amplifiées, voir atténuées. L'effet du filtre sur le signal $w(t)$ sera donc de ne laisser passer que la valeur moyenne et de couper les trois composantes. L'allure du spectre sera la suivante :



La valeur moyenne a été multipliée par H_0 (c'est-à-dire 200). L'amplitude des autres signaux est beaucoup plus faible. La tension de sortie du filtre est donc une tension continue qui vaut :

$$V = \frac{H_0 K\alpha DA}{2}$$

En mesurant cette tension, et en connaissant la valeur des autres paramètre, on peut facilement en revenir à D.

II Dispositif de balayage d'un microscope électronique

II.1 Générateur de balayage

II.1. Les courants d'entrée sont nuls. Le gain différentiel statique d'un A.L.I est de l'ordre de 10^5.

II.2. Le deuxième A.L.I possède uniquement une rétroaction positive. Il fonctionne donc en régime saturé.

II.3. La tension de sortie $u(t)$ ne dépassant pas 3V d'amplitude, l'A.L.I 2 fonctionne en régime linéaire.

II.4. Sachant que $v_e > 0$, la diode D_1 est passante et la diode D_2 est bloqué. On reconnaît dans le premier circuit un bloc intégrateur qui a pour résistance d'entrée $R = R_1$. En utilisant la même

technique que dans le cours, on a donc :

$$u(t) = -\frac{1}{R_1C}\int u(t)\mathrm{d}t = -\frac{V_0}{R_1C}t + \underbrace{\text{cste}}_{=0}$$

II.5. On utilise le théorème de Millman (à redémontrer obligatoirement...). On obtient :

$$v_+ = \frac{\frac{u}{R_3} + \frac{v_S}{R_4}}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}} = \frac{R_4u + R_3v_S}{R_3 + R_4}$$

Sachant que $v_S = +V_0$ tant que $\varepsilon > 0$, et sachant que $v_- = 0$, l'A.L.I bascule à la date t_1 telle que $v_+ = 0$, soit :

$$\frac{R_4u(t_1) + R_3V_0}{R_3 + R_4} = 0 \Rightarrow -\frac{V_0R_4}{R_1C}t_1 + R_3V_0 = 0 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{R_1R_3C}{R_4}}$$

II.6. La tension $u(t)$ est continue car il s'agit de la tension aux bornes du condensateur.

II.7. Pour $t \geq t_1$, l'A.O a basculé à $-V_0$. La diode D_1 est donc bloquée et la diode D_2 est passante. Le bloc intégrateur renvoie donc une tension :

$$u(t) = \frac{V_0}{R_2C}t + \text{cste}$$

On détermine la constante en utilisant la continuité de u à la date t_1 :

$$u(t_1^+) = u(t_1^-) \Leftrightarrow \frac{V_0}{R_2C}t_1 + \text{cste} = -\frac{V_0}{R_1C}t_1 \Rightarrow \text{cste} = -\frac{V_0}{C}t_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

La tension $u(t)$ s'annule en t_2 :

$$u(t_2) = 0 \Leftrightarrow \frac{V_0}{R_2C}t_2 - \frac{V_0}{C}t_1\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = 0 \Rightarrow \boxed{t_2 = \frac{R_3C}{R_4}(R_1 + R_2)}$$

II.8. On en déduit :

a)

$$\boxed{T = 2t_2 = 2\frac{R_3C}{R_4}(R_1 + R_2)}$$

b) On lit sur le chronogramme que le premier basculement de l'A.Li se fait à $t_1 \approx 1,8ms$ On lit $u(t_1) = -3$ V. Or :

$$u(t_1) = -\frac{V_0}{R_1C}t_1 = -3\text{V} \Rightarrow R_1 = -\frac{V_0}{u(t_1)C}t_1 \approx \boxed{8k\Omega}$$

En utilisant l'expression de t_1, on peut en déduire R_3 :

$$\frac{R_3R_1C}{R_4} = t_1 \Rightarrow R_3 = \frac{R_4t_1}{R_1C} \approx \boxed{0,2k\Omega}$$

En utilisant l'expression de t_2, sachant que $t_2 \approx 2,5$ms, on peut déduire R_2 :

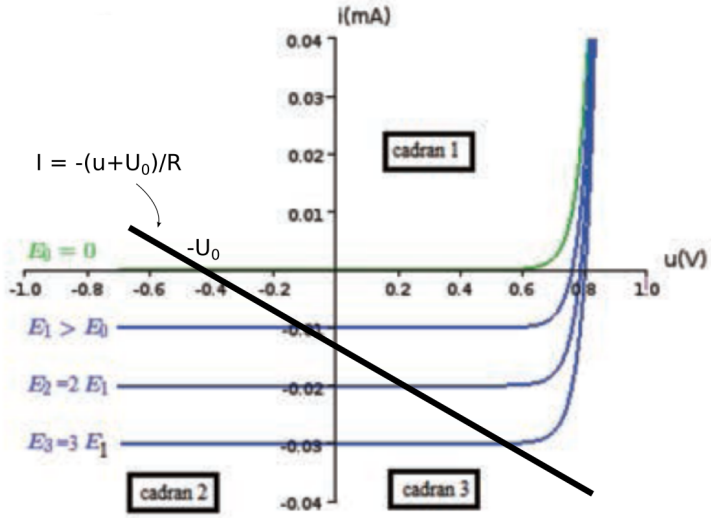
$$R_2 = \approx \boxed{2k\Omega}$$

II.2 Le capteur C.C.D

II.1. On lit $u_s \approx 0,6$ V.

II.2. La puissance reçue par un dipôle en convention récepteur vaut $P = UI$. Le dipôle reçoit effectivement de la puissance si $P > 0$ (cadrans 1 et 2). Le dipôle fournit de la puissance si $P < 0$ (cadrans 3 et 4).

II.3. La loi des mailles donne $u = u_1 - u_0 = -RI - U_0$ soit : $I = -\frac{u}{R} - \frac{U_0}{R}$, droite de pente négative (cf. figure ci-dessous). Le générateur impose $U < 0$ et $I < 0$.



Le point de fonctionnement, croisement de la caractéristique de la photodiode avec la droite, est nécessairement situé dans le cadran 2.

II.4. D'après la courbe, dans le cadran 2, l'intensité du courant est proportionnelle à l'éclairement. Pour $E = 1000$ lux, on lit $I = -0,01$ mA, pour $E = 2000$ lux, on lit $I = -0,02$ mA... La constante de proportionnalité entre E et I vaut donc -10^{-5} mA/lux $= -10^{-8}$ A/lux. Or $u_1 = -RI = R10^{-8}E$. La constante k vaut donc 10^5 V/lux.

II.5. Il s'agit d'un montage non inverseur. En appliquant le théorème de Millman, $U_2 = \frac{R_2+R_1}{R_1}kE$

III Contrôle non destructif par courants de Foucault

III.1 Etude du convertisseur courant-tension

III.1. On a $\varepsilon(t) = V_+(t) - V_-(t) = -V_-(t)$. Par ailleurs, $V_-(t) - u_A(t) = R_1 i(t)$. On a donc : $\varepsilon(t) + u_A(t) = R_1 i(t)$. En utilisant la fonction de transfert de l'A.O, on en déduit :

$$\begin{aligned} K^{-1}(j\omega)u_A(t) + u_A(t) = R_1 i(t) \Rightarrow \frac{u_A(t)}{i(t)} i(t) &= \frac{R}{1 + K^{-1}(j\omega)} \\ &= \frac{K_0 R_1}{K_0 + 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \\ &= \frac{\frac{K_0 R_1}{K_0+1}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0(K_0+1)}} \end{aligned}$$

Par identification $G_0 = \frac{K_0 R_1}{K_0+1}$ et $\omega_c = \omega_0(K_0+1)$.

Dans le cas où $K^0 = 10^6$, $G_0 \approx R_1$. Par ailleurs $\omega_c = 2.10^8$ rad.s^{-1} et $\omega < 1,25.10^6$ rad.s^{-1}, on a donc $\frac{\omega}{\omega_c} < 0,01$. La fonction de transfert se simplifie en :

$$\frac{\underline{u}_A(t)}{\underline{i}(t)} = R_1$$

La tension de sortie de l'A.O est donc proportionnelle au courant d'entrée.

III.2. Dans ce cas, on obtient $\varepsilon(t) - u_A(t) = R_1 i(t)$. La transmittance s'écrit :

$$\frac{u_A(t)}{i(t)} i(t) = \frac{K_0 R_1}{-K_0 + 1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

En considérant $K_0 >> 1$, l'expression précédente donne :

$$\frac{u_A(t)}{i(t)} i(t) = \frac{K_0 R_1}{-K_0 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

En repassant en réel, on obtient :

$$-K_0 u_A(t) + \frac{1}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_A(t)}{\mathrm{d}t} = K_0 R_1 i(t)$$

Le régime transitoire de cette équation est de la forme $u_A^{(h)}(t) = C\mathrm{e}^{\omega_0 K_0 t}$. Le système est instable.

III.2 Etude du circuit déphaseur

III.1. Le gain du filtre vaut :

$$G = \left|\frac{1-jx}{1+jx}\right| = \sqrt{\frac{1+x^2}{1+x^2}} = 1 \quad \forall x$$

Le filtre n'a qu'une action sur la phase du signal d'où son nom de déphaseur.
Le déphasage introduit par le filtre vaut $\varphi = -2\arctan(x)$. Ce déphasage vaut $\frac{\pi}{2}$ quand $x = 1$ soit $\boxed{R_a = \frac{1}{C\omega} = 36k\Omega}$.
La tension de sortie s'écrit $u_D(t) = -R_1 I_0 \cos(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}) = -R_1 I_0 \sin(\omega t - \varphi)$.

IV Capteur capacitif

IV.1 Etude du bloc 1

Le bloc 1 réalise un filtre de fonction de transfert complexe $\underline{H} = \underline{u}_2/\underline{u}_1$ avec :

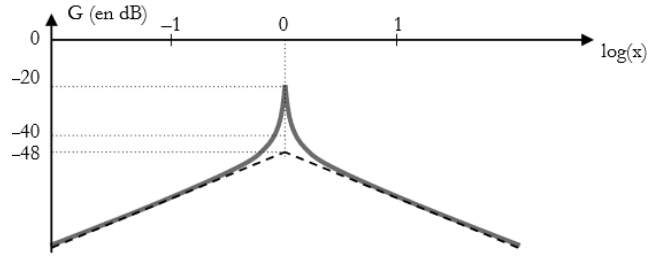
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

avec $A_0 = 0,1$, $Q = 25$, $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

IV.1. Les asymptotes ont pour équations :

$$G_{\text{dB}}(B.F) = 20\log x + 20\log\frac{H_0}{Q} \quad G_{\text{dB}}(H.F) = -20\log(x) + 20\log\frac{H_0}{Q}$$

IV.2. Le gain est maximal à la résonance en $x = 1$. Le gain vaut alors $G_{\text{dB}} = 20\log H_0 = -20\text{dB}$. Les asymptotes se croisent elles en $20\log\frac{H_0}{Q} \approx -48\text{dB}$



IV.3. Il s'agit d'un passe bande d'ordre 2.

IV.4. En supposant le courant de sortie nul, on peut utiliser un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_2(t) = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R_0 + \underline{Z}_{eq}}\underline{u}_1(t) \Rightarrow \underline{H} = \frac{1}{R_0\underline{Y}_{eq} + 1} = \frac{1}{R_0\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega\right) + 1}$$
$$= \frac{\frac{R}{R_0+R}}{1 + j\frac{RR_0}{R_0+R}\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

Par identification, on a $H_0 = \frac{R}{R_0+R}$ et :

$$\begin{cases} \frac{RR_0C}{R_0+R} = \frac{Q}{\omega_0} \\ \frac{RR_0}{L(R_0+R)} = Q\omega_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ Q &= \frac{RR_0}{L(R_0+R)}\sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

IV.2 Circuit bouclé

On ferme l'interrupteur, réalisant ainsi un système bouclé.

IV.1. On a alors $u_3 = u_1$. Cela impose :

$$u_3 = \frac{u_2}{\underline{H}} = \frac{u_3}{K\underline{H}} = \frac{1}{KH_0}\left(1 + jQ\frac{\omega}{\omega_0} + Q\frac{\omega_0}{j\omega}\right)u_3(t)$$

En multipliant à gauche et à droite par $j\omega$ et en repassant en réel, on en déduit :

$$KH_0\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{Q}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}^2u_3(t)}{\mathrm{d}t^2} + Q\omega_0u_3(t)$$

D'où :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_3}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}(1 - KH_0)\frac{\mathrm{d}u_3}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_3 = 0}$$

IV.2.
- Si les oscillations sont quasi-sinusoïdales, l'équation du système doit être celle d'un oscillateur harmonique : le terme d'ordre un doit être nul ce qui impose $\boxed{KH_0 = 1}$.
- La fréquence des oscillations vaut $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$.

IV.3. Pour que les oscillations apparaissent, il faut que le système soit instable. On prendra donc $KH_0 > 1$

IV.4. Approche numérique

a) Ecrivons le polynôme caractéristique :

$$r^2 - 10^4 r + 9.10^8 = 0$$

On a $\Delta = -3,5.10^9 < 0$ et deux racines complexes :

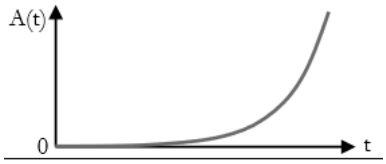
$$\begin{cases} r_1 & = 5.10^3 + j3.10^4 \\ r_2 & = 5.10^3 - j3.10^4 \end{cases}$$

La forme générale des solutions est :

$$u_3(t) = A\mathrm{e}^{5.10^3 t}\cos(3.10^4 t + \varphi)$$

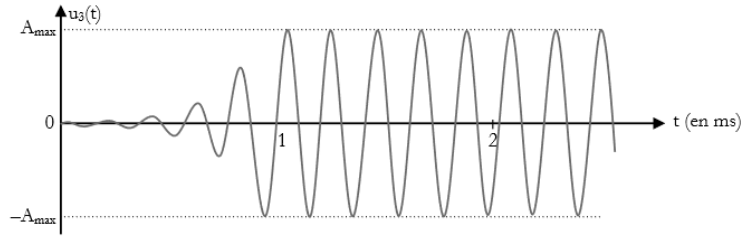
b) Il s'agit bien d'oscillations dont l'amplitude A varie temporellement.

c) On a $A(t) = A\mathrm{e}^{5.10^3 t}$



d) Dans la pratique, la tension de saturation limite la tension de sortie. On a $A_{\max} = 11V$.

e)



IV.5. a) On effectue un D.L à l'ordre 1 :

$$f_{\text{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C_0\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}} = \frac{D}{\sqrt{C_0}}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \frac{D}{\sqrt{C_0}} + \frac{D}{2\sqrt{C_0}\ell}x$$

b) $\Delta f = \frac{D}{2\ell}x \Rightarrow x_{\min} = 2\ell\frac{\sqrt{C_0}\Delta f_{\min}}{D} = 0,19$ mm

V Chimie

V.1 Résolution de problème

On note k_1 et k_2 les constantes de vitesse aux températures T_1 et T_2. L'élimination de la théophylline étant deux fois plus rapide pour un patient fiévreux, on peut considérer que $\boxed{k_2 = 2k_1}$. En appliquant la loi d'Arrhénius cela donne :

$$A.e^{\frac{-E_A}{RT_2}} = 2A.e^{\frac{-E_A}{RT_1}} \Rightarrow E_A = \frac{R\ln 2T_1T_2}{T_2 - T_1} = 170\text{kJ.mol}^{-1}$$

V.2 Exercice

V.1. Le prélèvement est refroidi dans un bain de glace pour ralentir voire arrêter la réaction étudiée, ceci afin que la composition du milieu réactionnel évolue le moins possible pendant la réalisation du titrage.

V.2. Equation de la réaction de titrage :

$$H_3O^+(aq) + HO^-(aq) = 2\,H_2O\,(l)$$

A l'équivalence du titrage : $(n_{H_3O^+})$versé à l'équivalence $= (n_{HO^-})$présent dans le prélevement. On en déduit : $C_A.V_{A,eq} = [HO^-].V_0$ puis $[HO^-] = \frac{C_A.V_{A,eq}}{V_0}$.
Résultats :

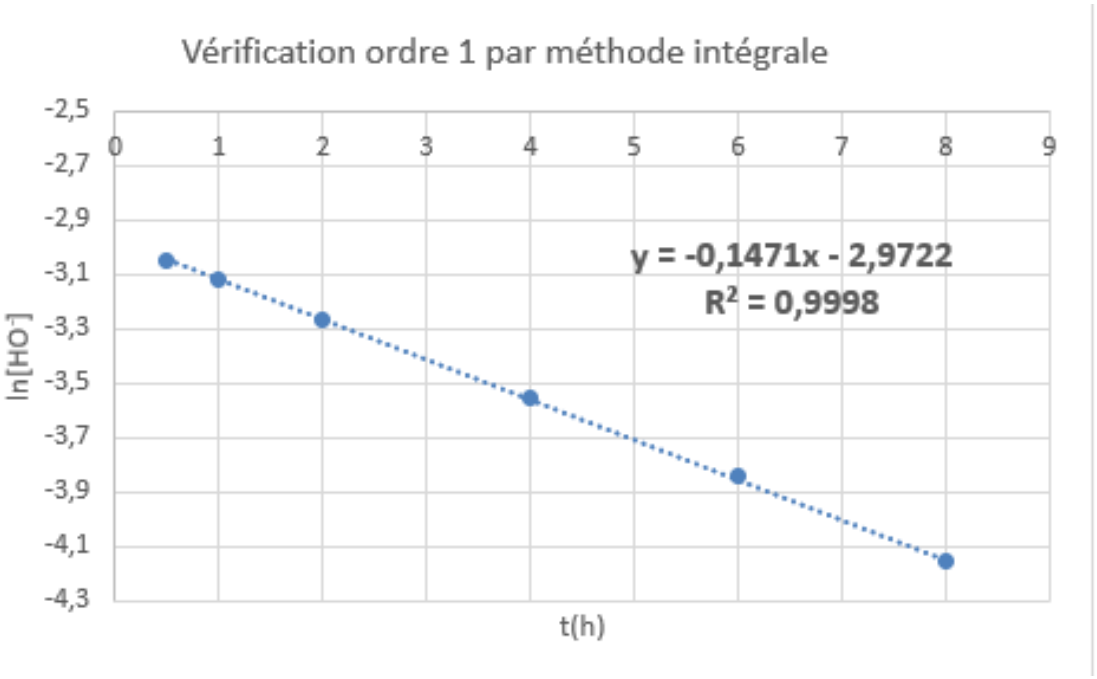
t (h)	0,5	1	2	4	6	8
V_{Aeq} (mL)	9,48	8,83	7,63	5,70	4,28	3,13
$[HO^-]$ ($mol.L^{-1}$)	$4,74.10^{-2}$	$4,41.10^{-2}$	$3,81.10^{-2}$	$2,85.10^{-2}$	$2,14.10^{-2}$	$1,57.10^{-2}$

V.3. La loi de vitesse s'écrit : $v = k[RCl]^a[OH^-]^b$. Dans cette expérience, le mélange est stœchiométrique soit $[RCl] = [OH^-]$ on en déduit $\boxed{v = k[OH^-]^{a+b}}$.

V.4. Si l'ordre global de la réaction est égal à 1 alors la concentration en ions hydroxyde vérifie :

$$\frac{d[OH^-]}{dt} = -k[OH^-]$$

et on a $\boxed{\ln[OH^-] = \ln[OH^-]_0 - kt}$. On trace donc le graphe $\ln[OH^-] = f(t)$.



On obtient une droite ($R^2 = 0{,}9998$ et points bien distribués par rapport à la droite moyenne), l'ordre global de 1 est confirmé.

V.5. La pente de la droite est égale à $-k$. On en déduit $\boxed{k = 1,47.10^{-1}h^{-1}}$.