

TD n°2 Montages à ALI

ENCPB - Pierre-Gilles de Gennes

Résumé

★ Exercice à maîtriser absolument: il fait intervenir les compétences fondamentales.

● Exercice technique nécessitant des calculs.

◇ Exercice nécessitant un sens physique particulier.

Etude d'une double rétroaction●

1. On peut écrire deux relations liant $s(t)$ et $e(t)$. Le gain de l'ALI en régime linéaire vaut :

$$s(t) = \frac{\mu_0}{1 + j\frac{f}{f_0}} \varepsilon(t)$$

D'autre part, un premier pont diviseur de tension donne :

$$v_+(t) = \frac{s(t)}{1+k}$$

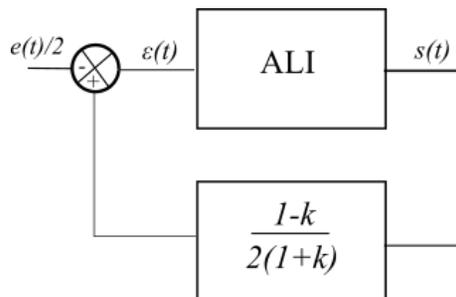
Par ailleurs, en appliquant le théorème de Millman, on obtient :

$$v_-(t) = \frac{\frac{e(t)}{R} + \frac{s(t)}{R}}{\frac{2}{R}} = \frac{e(t) + s(t)}{2}$$

On en déduit :

$$\varepsilon(t) = v_+ - v_- = \frac{1-k}{2(1+k)} s(t) - \frac{e(t)}{2}$$

Le schéma bloc correspondant est :



2. On exprime la fonction de transfert du montage :

$$\begin{aligned} s(t) &= \frac{\mu_0}{1 + j\frac{f}{f_0}} \left(\frac{1-k}{2(1+k)} s(t) - \frac{e(t)}{2} \right) \\ \Rightarrow s(t) \left(\frac{1 + j\frac{f}{f_0}}{\mu_0} - \frac{1-k}{2(1+k)} \right) &= -\frac{e(t)}{2} \\ \Rightarrow \underline{H} &= -\frac{1}{2 \left(\frac{j\frac{f}{f_0}}{\mu_0} + \frac{1}{\mu_0} - \frac{1-k}{(1+k)} \right)} \end{aligned}$$

En supposant que $\mu_0 \gg \frac{2(1+k)}{1-k}$, on en déduit :

$$\underline{H} = -\frac{\mu_0}{2j\frac{f}{f_0} - \mu_0 \frac{1-k}{2(1+k)}}$$

Le système est stable si et seulement si $1-k < 0$ soit $k > 1$. On peut comprendre ce résultat qualitativement en réalisant que si $k > 1$, la résistance de la rétroaction positive est plus importante que la rétroaction négative. Dans ce cas, le courant de la rétroaction négative est plus important que celui de la rétroaction positive, ce qui assure la stabilité du système.

3. A la limite $k = 1$, on ne peut plus négliger $\frac{2(1+k)}{1-k}$ devant μ_0 . Sans approximation, le calcul de la fonction de transfert donne : la fonction de transfert devient :

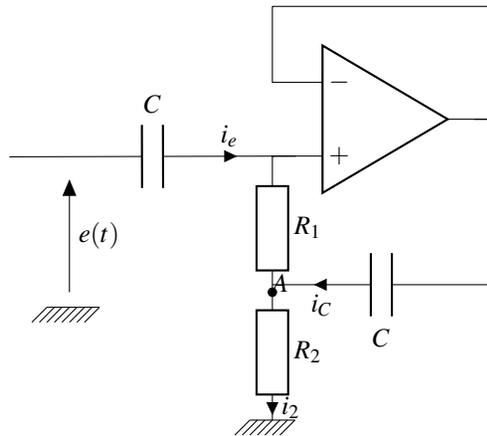
$$\underline{H} = -\underline{H} = -\frac{\mu_0}{2 \left(j\frac{f}{f_0} + 1 \right)}$$

Le filtre se comporte comme un ALI de gain statique $-\frac{\mu_0}{2}$.

Impédance simulée •

C'est un exercice qui peut s'avérer très calculatoire si on ne s'y prend pas avec méthode. L'objectif est d'exprimer l'impédance d'entrée du montage qui vaut $Z_e = \frac{e}{i_e}$.

On introduit par la suite le potentiel v_A et les courants i_1 et i_2 (voir figure).



On peut écrire :

$$e = (e - v_A) + v_A = (Z_c + R_1)i_e + v_A \quad (1)$$

Par ailleurs,

$$v_A(t) = R_2 i_2 = R_2(i_e + i_c) = R_2 i_e(t) + R_2 \frac{v_S(t) - v_A(t)}{Z_C} \quad (2)$$

Or, l'A.O fonctionnant en régime linéaire, on a : $v_S = v_- = v_+$. La tension aux bornes de la résistance R_1 vaut donc $v_S - v_A$ et la loi d'Ohm donne :

$$v_S - v_A = R_1 i_e \quad (3)$$

En utilisant l'équation (3) dans l'équation (2), puis (2) dans (1), on en déduit :

$$Z_e = Z_c + R_1 + R_2 + jCR_1R_2\omega$$

Le circuit est donc équivalent à l'association série du condensateur C et des résistances R_1 et R_2 , auquel s'adjoit un terme qui joue le même rôle qu'une inductance pure de valeur $L = R_1R_2C$. L'A.O permet donc ici de simuler une bobine idéale.

Amplification et filtrage d'un signal •

1. A basse-fréquence, les condensateurs sont équivalents à des circuits ouverts. Le courant $i_{+,1}$ étant nul, le potentiel $v_{+,1} = 0$ (tension aux bornes de la résistance R nulle). On a donc $v_{-,1} = v_{s,1} = 0$. Comme $v_{-,2} = v_{+,2} = 0$, la tension aux bornes de la deuxième résistance R est aussi nulle. On en déduit que tous les courants sont nuls. La tension s vaut donc aussi zéro.

A haute fréquence, on a $v_{s,1} = v_{-,1} = s$. En appliquant le théorème de Millman à la borne inverseuse du deuxième A.O, on en déduit $s = 0$. Il s'agit d'un filtre passe-bande.

2. Notons $u(t)$ la tension de sortie du premier A.O et $v(t)$ le potentiel au noeud liant les deux condensateurs et la résistance R . Le deuxième A.O est inséré dans un montage inverseur. On trouve :

$$u(t) = -\frac{s(t)}{\alpha} \quad (4)$$

Le premier A.O est inséré dans un montage suiveur. A l'aide d'un pont diviseur de tension appliqué en entrée du suiveur, on trouve :

$$u(t) = \frac{R}{R + Z_C} v(t) \quad (5)$$

Enfin, le théorème de Millman donne :

$$v(t) = \frac{\frac{e(t)}{R} + \frac{s(t)}{Z_C} + \frac{u(t)}{Z_C}}{\frac{1}{R} + \frac{2}{Z_C}} \quad (6)$$

En utilisant les relations (4), (5) et (6), on en déduit :

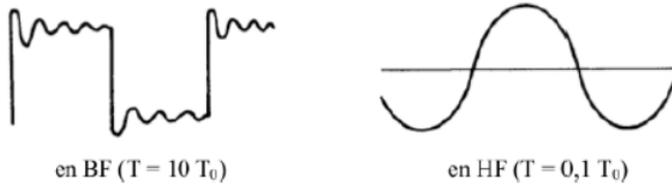
$$\underline{H} = -\frac{\frac{\alpha}{3}}{1 + \frac{j}{3}(RC\omega(1 + \alpha) - \frac{1}{RC\omega})}$$

On en déduit : $H_0 = \frac{-\alpha}{3}$ et :

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{RC(1+\alpha)}{3} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{3RC} \end{cases} \iff \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{RC\sqrt{1+\alpha}} \\ Q = \frac{1}{3}\sqrt{1+\alpha} \end{cases}$$

3. Pour $\alpha = 8$, on trouve $Q = 1$. Le filtre passe-bande est moyennement sélectif. Le gain maximal est attendu à la résonance ($\omega = \omega_0$) où il faut $G = \frac{8}{3}$. A basse et à haute fréquence, on retrouve les asymptotes à +20dB/dec et à -20 dB/dec.

4. Pour $T = 10T_0$, le signal d'entrée est de basse fréquence. On se trouve donc dans le domaine dérivateur du filtre. On obtient en sortie un signal créneau. On peut voir de petites oscillations qui sont dues au régime transitoire (régime pseudo-périodique). Pour $T = 0.1T_0$, on se situe dans le domaine intégrateur du filtre. On obtient comme signal de sortie des morceaux de paraboles (voir ci-dessous)



5. (a) Il faut prendre $f_0 = 3f$
 (b) On peut effectuer un petit tableau :

Amplitude d'entrée (V)	Gain	Amplitude de sortie(V)
$\frac{4}{\pi} \approx 1,27$	$\frac{8}{3\sqrt{1+(3-\frac{1}{3})^2}} \approx 0,93$	$\approx 1,18$
$\frac{4}{3\pi} \approx 0,42$	$\frac{8}{3}$	$\approx 1,12$
$\frac{4}{3\pi} \approx 0,25$	$\frac{8}{3\sqrt{1+(\frac{5}{3}-\frac{3}{3})^2}} \approx 1,82$	$\approx 0,45$

On voit que le filtrage n'est pas de bonne qualité : l'amplitude de la fondamentale est plus grande que celle de l'harmonique qu'on souhaite sélectionner. La bande passante du filtre est trop large.

Filtre de Butterworth

1. A basse fréquence, aucun courant ne passe dans les résistances. Leurs tensions sont donc nulles. On en déduit $\underline{H} = 1$. A haute fréquence, on a $v_s = v_- = v_+ = 0$. Il s'agit donc bien d'un filtre passe-bas.
2. Notons v_A le potentiel au niveau du noeud liant les deux résistances R et le condensateur C_2 . Un premier pont diviseur de tension donne :

$$v_s = v_- = v_+ = \frac{1}{1 + jRC_1\omega} v_A$$

Le théorème de Millman en A donne :

$$v_A = \frac{e + v_s + jRC_2\omega v_s}{2 + jRC_2\omega}$$

En substituant l'expression de v_A , on obtient après calcul :

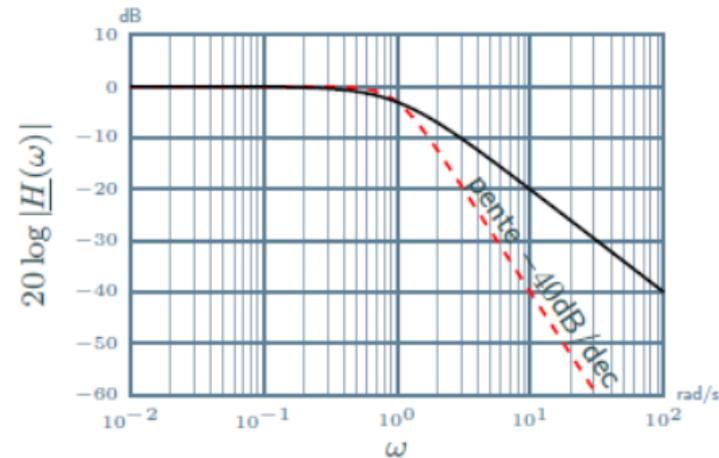
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jRC_1\omega - R^2C_1C_2\omega^2}$$

3. En calculant le module, on obtient la bonne forme à condition que :

$$4(RC_1\omega)^2 = 2R^2C_1C_2\omega^2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 2C_1}$$

On trouve alors $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{2}RC_1}$. $|H|$ est maximal pour $\omega = 0$ et vaut 1. On cherche alors ω_c tel que $|H|(\omega_c) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ soit $\boxed{\omega_c = \omega_0}$.

4. Pour le filtre de Butterworth, c'est un filtre d'ordre 2, dont l'asymptote oblique est simplement d'équation $G_{dB} = 40 \log(\omega_0) - 40 \log \omega$ donc de pente -40dB/dec . D'où l'allure ci-dessous :



On voit que par rapport à un filtre du premier ordre les hautes fréquences sont beaucoup plus atténuées. Par ailleurs, les basses fréquences sont légèrement moins atténuées au voisinage de la fréquence de coupure. Ce filtre est donc particulièrement efficace. Par ailleurs, son gain ne présente pas de résonance, phénomène parasite qui amènerait à l'amplification non souhaitée d'une fréquence particulière.

Filtre de Rauch

On suppose que l'ALI fonctionne en régime linéaire.

1. (a) A basse fréquence, il n'y a pas de courant qui traverse les condensateurs. Il n'y a donc pas de courant qui traverse R_2 car $i_- = 0$. La tension aux bornes de R_2 est donc nulle et $v_s = v_- = v_+ = 0$. A haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils. On a donc un fil entre la sortie de l'ALI et l'entrée inverseuse. On a donc de nouveau $v_s = v_- = 0$.
- (b) L'application du théorème de Millman en v_- donne : $v_A = -\frac{Z_C}{R_2} v_s$. Par ailleurs, l'application du théorème de Millman en A donne :

$$\begin{aligned} \frac{v_e - v_A}{R_1} + \frac{0 - v_A}{R} + \frac{0 - v_A}{Z_C} + \frac{v_s - v_A}{Z_C} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{v_e}{R_1} + \frac{Z_C}{R_2 R'} v_s + \frac{v_s}{Z_C} + 2 \frac{v_s}{R_2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= -\frac{1}{R_1 \left(\frac{Z_C}{R_2 R'} + \frac{1}{Z_C} + \frac{2}{R_2} \right)} \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{-\frac{R_2}{2R_1}}{1 + \frac{j}{2} \left(R_2 C \omega - \frac{1}{R' C \omega} \right)} \end{aligned}$$

On en déduit $H_0 = -\frac{R_2}{2R_1}$ et :

$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{R_2 C}{2} \\ Q \omega_0 = \frac{1}{2R' C} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Q = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R_2}{R'}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R' R_2 C}} \end{cases}$$

2. (a) On doit avoir $f_0 = 3f$.
- (b) Il faut exprimer le gain aux fréquences f et $5f$ sachant que $f_0 = 3f$. On a :

$$\begin{aligned} G(f) &= \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{64}{9} Q^2}} \\ G(5f) &= \frac{H_0}{\sqrt{1 + \frac{16^2}{15^2} Q^2}} \end{aligned}$$

Mesure de la constante $\mu_0 \omega_0$ d'un A.O

La bonne valeur de C dans cet exercice est $C = 220$ nF.

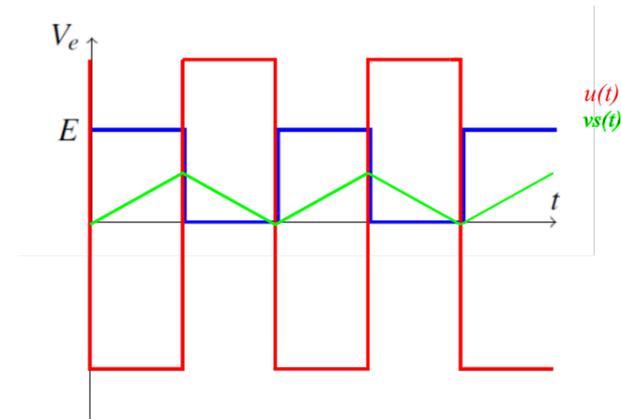
1. Le premier ALI n'a pas de rétroaction. Il fonctionne à priori en régime saturé. Le deuxième ALI a une boucle de rétroaction négative, il fonctionne à priori en régime linéaire.

2. A l'instant initial, le condensateur n'étant pas chargé, la tension à ses bornes est nulle. On a donc $v_{+,2} = 0 = v_{-,2} = v_s(t=0) = v_{+,1}(t=0)$. On en déduit $\varepsilon_1(t=0) = v_{+,1}(t=0) - v_{-,1}(t=0) = -E < 0$. On a donc $u(t=0) = -V_{sat}$. Le deuxième montage étant un intégrateur, on a $v_s(t) = \frac{V_{sat}}{RC} t$. L'ALI1 ne commute pas tant que :

$$\varepsilon_1(t) < 0 \Leftrightarrow v_s(t) < E \Leftrightarrow t < \frac{RCE}{V_{sat}} \Leftrightarrow t < 2,8 \text{ms}$$

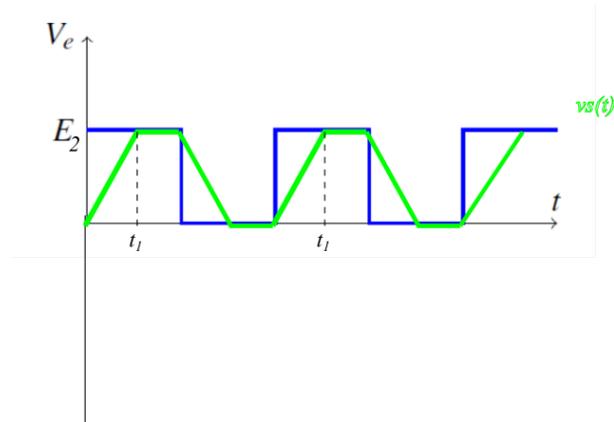
L'ALI1 ne commute donc pas sur $0 < t < \frac{T}{2}$.

3. A $t = \frac{T}{2}^+$, $v_e(t)$ bascule à 0. Alors $\varepsilon_1(t = \frac{T}{2}^+) = -\frac{V_{sat} T}{2RC} < 0$ ce qui entraîne le basculement de $u(t)$ à $-V_{sat}$. La tension de sortie devient $v_s(t) = -\frac{V_{sat}}{RC} (t - T)$. L'allure des courbes est la suivante :



4. On reprend exactement le même calcul. L'ALI1 atteint la valeur E_2 quand $t_1 = \frac{RCE_2}{V_{sat}} = 1,68 \text{ms} < \frac{T}{2}$. Que se passe-t-il pour $\frac{T}{2} < t < T$? Supposons que l'ALI1 bascule à $+V_{sat}$. Dans ce cas, $v_s(t)$ va décroître et on aurait immédiatement $\varepsilon_1 < 0$ ce qui est absurde ! La seule explication est que l'ALI1 reste stable en régime linéaire même en absence de rétroaction négative !¹ La courbe de $v_s(t)$ aura alors l'allure suivante :

¹ Pour le montrer proprement, il faut repartir de l'expression du gain fini de l'ALI (cf question suivante).



5. Sachant que $\frac{dv_s}{dt}(t) = -\frac{u(t)}{RC}(t)$ et que $\varepsilon_1 = v_s(t) - E_2$, on obtient en substituant :

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d^2 v_s}{dt^2}(t) + \frac{dv_s}{dt}(t) = -\mu_0 RC(v_s(t) - E_2)$$

ce qui est bien équivalent à l'équation demandé.

6. On a une équation d'oscillateur harmonique amorti de pulsation propre $\omega = \sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0}{RC}}$. Si on observe des relations très amorties, le facteur de qualité est très grand, et on peut approximer en première approximation la pseudo-pulsation des oscillations amorties à la pulsation propre. On en déduit :

$$\sqrt{\frac{\mu_0 \omega_0}{RC}} \approx \frac{2\pi}{\tau} \Rightarrow \mu_0 \omega_0 = \frac{4\pi^2 RC}{\tau^2} = \frac{4 \times 9 \times 10^4 \times 2,2 \cdot 10^{-7}}{25 \cdot 10^{-10}} = 3 \cdot 10^7 \text{s}^{-1}$$

Cette valeur est cohérente avec les valeurs données en cours $\mu_0 = 2 \cdot 10^5$ et $\omega_0 = 100 \text{s}^{-1}$. La constante $\mu_0 \omega_0$ intervient dans l'expression de la bande passante du montage amplificateur non inverseur dans le cas d'un ALI de gain fini.